Université d'Evry Val d'Essonne
Laboratoire d'Analyse et Probabilités
EA 2172

THESE

présentée

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

de l'Université d'Evry Val d'Essonne

par

Armand Brice NGOUPEYOU

Optimisation des portefeuilles d'actifs soumis au risque de défaut.

soutenue le 07 Juillet 2010

devant le jury composé des professeurs :

Laurent Denis	Examinateur
Monique JEANBLANC	Directeur
Nicole EL KAROUI	Examinateur
Anis MATOUSSI	Co-Directeur
Huyen PHAM	Rapporteur
Agnès SULEM	Rapporteur

Rapporteurs

– Bruno BOUCHARD : Université Paris-Dauphine.

– Huyen Pham : Université Paris 7 Diderot.

– Agnès SULEM : Institut National de la Recherche en Informatique et Automatique.

À ma mère

"Voici je mets en Sion une pierre angulaire, choisie, précieuse, et celui qui croit en elle ne sera point confus."

La Bible, Pierre 2 :6 .

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à ma directrice de thèse Monique Jeanblanc qui m'a toujours encouragé dans mes travaux et qui m'a donné l'envie et le plaisir de chercher et réaliser ce travail dans un cadre agréable. Je suis un admirateur de Monique car par son volume de travail et sa capacité à répondre facilement aux questions elle me montre la voie pour réussir et devenir plus tard un vrai chercheur.

Je ne pourrai pas trouver de mots pour remercier mon co-directeur de thèse Anis Matoussi qui m'a guidé et orienté depuis ma deuxième année universitaire. Il a su m'encadrer, m'apporter le soutien technique et moral dont j'avais besoin tout au long de mon parcours universitaire, je ne le remercierai jamais assez.

Je tiens à remercier mes rapporteurs de thèse Bruno Bouchard, Huyen Pham, Agnès Sulem d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je les remercie pour tout le temps qu'ils ont accordé pour la lecture de cette thèse et pour toutes leurs suggestions.

Je tiens à remercier Nicole El Karoui d'avoir accepté d'être membre de jury de cette thèse.

Je tiens à remercier mes collègues Behnaz Zaghari, Georgia Gallegaro, Thomas Lim avec qui j'ai passé des moments formidables tout au long de ma thèse, merci pour ces moments d'échange et de partage qui m'ont permis d'apprécier mon séjour à l'université d'Evry, merci pour ces moments de fous rires au Laboratoire qui m'ont permis de déstresser et de travailler dans un cadre agréable.

Un grand remerciement à Laurent Denis pour sa disponibilité, pour son aide dont il a fait preuve à mon égard.

Je tiens à remercier Ould Baba El Maouloud pour son aide en logiciels et équipements informatiques, Valérie Picot pour la grâce et la gentillesse dont elle a fait preuve à mon égard tout au long de mes années de thèse.

Je tiens à remercier tous les membres du laboratoire pour leur accueil, il y règne une ambiance conviviale, tout cet univers et ces lieux que j'ai parcouru me manqueront énormément.

Un merci particulier à Jean Pierre Lepeltier, Said Hamadène, Alexandre Popier pour leurs encouragements, à toute l'équipe du Laboratoire de Mathématiques de l'université du Mans pour leur accueil et leur soutien.

Je tiens à remercier les membres du projet Premia Enpc/Inria, Antonino Zanette pour m'avoir donné la chance de travailler pour ce projet, Ahmed Kebaier pour ses conseils et ses encouragements et tous les autres membres pour leur accueil et partage au Cermics.

Je tiens à remercier la famille Nana et la famille Mbopda pour leur soutien moral tout au long de ces années de thèse.

Je tiens à remercier tous les membres de ma famille, je commencerai par mon bien aimé grand frère Achille que je respecte pour ses capacités en Mathématiques, il a su me donner l'envie de m'intéresser dès mon enfance à cette discipline pour sa logique et l'espérance qu'elle pouvait nous apporter. Par son travail, sa persevérance, il a su me montrer l'exemple, par cette thèse je lui rends hommage car si on reste dans l'univers des Mathématiques je suis une version de mon grand frère qui a eu la chance de continuer ses études dans de bonnes universités avec tout le confort et l'aide qui suivent.

Je tiens à remercier mon père pour son soutien. Un grand merci à ma grande soeur Inès avec qui j'ai travaillé en Mathématiques toute mon enfance, elle m'a guidé et a toujours cru en moi, merci grande soeur.

Je remercie très chaleureusement ma petite soeur Armelle qui a supporté toutes mes humeurs cette année, sa joie de vivre et son esprit combatif me poussent à ne jamais baisser les bras. Un grand merci pour ma petite soeur Vanessa, elle est une lumière, sa constante bonne humeur et son humulité me fait comprendre qu'on doit rester toujours humble et dans une quête quotidienne du savoir. Je remercie mon frère Steeve et ma petite soeur Prisicilia pour tout leur amour. Merci mes amis Karly, Séverin, Merlin, Patrice, Roméo, Mireille, Césaire, Franck, Eric et Hervé avec qui j'ai partagé mes soucis et inquiétudes.

Je garde biensûr pour la fin la personne à qui je dédie cette thèse : ma mère, celle qui a été toujours là pour moi, dans tous mes combats j'ai ressenti son amour qui me portait et permettait de rester debout, elle m'a béni par ses actes et son amour pour son prochain,

Avant-propos

Cette thèse est constituée de trois parties portant sur la maximisation d'utilité des portefeuilles d'actifs soumis au risque de défaut et sur la valorisation des dérivés de crédit. Dans la première partie, on travaille en modèle certain c'est à dire sous l'hypothèse qu'il existe une unique probabilité historique (modèle) ; dans la seconde partie on suppose l'hypothèse inverse, en considérant une multitude de modèles. Notre travail dans cette partie consiste à déterminer le "bon" modèle et à caractériser la richesse optimale dans ce modèle. La troisième partie porte sur les différentes méthodes de valorisation d'un dérivé de crédit.

La première partie de cette thèse est un travail réalisé avec mes directeurs de thèse. C'est un Preprint intitulé "Quadratic Backward Stochastic Differential Equations with jumps and application in utility maximization".

La deuxième partie de cette thèse est un travail réalisé avec mes directeurs de thèse et soumis au journal "Finance and Stochastics" sous le titre de "Robust utility from terminal wealth and consumption in discontinuous filtration".

La troisième partie est la suite de mon travail de stage de Master II effectué au sein de l'INRIA et de l'ENPC dans le projet Mathfi Premia sous la direction d'Agnès Sulem et d'Antonino Zanette. A la fin de mon stage, j'ai intégré l'équipe Mathfi-Premia section risque de crédit pour étudier la valorisation des dérivés de crédit en décrivant des algorithmes de pricing et de calibration. Le but étant d'avoir un outil performant de pricing.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Les deux premières parties de ce travail sont de nature théorique. Cependant, elles correspondent à des préoccupations majeures des intervenants sur les marchés financiers. Un cas particulier du modèle que nous avons étudié est celui où les processus de comptage sont des indicateurs de défaut (c'est à dire, $H_t^i = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$, où les τ_i sont des variables positives représentant les temps de défaut, $i = 1, \cdots, d$). Nous avons ainsi dans un cadre général où les défauts sont correlés (par l'intermédiaire des intensités) mesuré le risque de modèle, c'est à dire le risque d'un choix de dépendance incorrect. En effet, face à la crise actuelle, les pertes des banques et l'illiquidité actuelle des produits soumis au défaut (CDS, CDS, $\cdots$) mettent en évidence plusieurs risques dont il est important de tenir compte dans l'avenir : le risque du choix du modèle pour tenir compte du risque de défaut et de contagion, le risque d'illiquidité et le risque de contrepartie. Nous avons montré dans ces travaux qu' il est possible de construire un modèle en considérant le risque de défaut, tout en définissant une mesure de risque dynamique associée à un actif contingent dépendant des défauts des firmes dans le système considéré.

Nous travaillons dans un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ où tous les processus considérés dans cette étude sont $\mathbb{G}-$ adaptés et définis sur l'intervalle $[0, T]$ où T est à horizon fini et nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse A 1

1) Pour tout $i = 1, \ldots, d$, H^i est un processus de comptage et il existe un processus adapté

et positif λ^i, *appelé l'intensité de* H^i *sous* $\mathbb{P}$, *tel que le processus* N^i *donné par* $N_t^i := H_t^i - \int_0^t \lambda_s^i ds$ *est une* $\mathbb{G}-$ *martingale. Nous supposerons que les processus* $H^i, i = 1, \ldots, d$ *n'ont pas de sauts communs.*
2) Toute martingale discontinue admet une représentation de la forme suivante : $dM_t^Y = \sum_{i=1}^d \widehat{Y}_t^i dN_t^i$ *où* $\widehat{Y}^i, i = 1, \ldots, d$ *sont des processus* $\mathbb{G}-$ *prévisibles.*

Ces hypothèses sont satisfaites dans le cas où la filtration est générée par un mouvement Brownien et un processus de Poisson inhomogène et dans le cadre du risque de crédit. Dans le cas d'une filtration générée par un mouvement Brownien p-dimensionnel et les temps de défaut le prix d'un actif aura la forme suivante :

$$dS_t^i = S_{t^-}^i \left[\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{i,j} dN_t^j + \sum_{j=d+1}^{d+p} \sigma_t^{i,j} dW_t^{j-d} \right], i = 1, \ldots, d.$$

Le processus $\sigma^{i,j}$ représente l'impact de l'actif de j sur le prix de l'actif i. Pour une richesse donnée, nous nous intéressons dans une première partie à la composition optimale d'un portefeuille de tels actifs. Nous déduirons de cette étude le prix d'un actif contingent non duplicable étant donnée l'aversion au risque de l'investisseur via la notion de "prix d'indifférence". Dans la deuxième partie nous étudions la notion du risque de modèle en supposant une multitude de façons de percevoir le modèle, nous étudierons le choix du "bon" modèle et définissons la consommation et la richesse optimale sous ce modèle. Dans la troisième partie nous donnons quelques résultats numériques obtenus lors des calculs des prix des dérivés de crédit.

Notations

Les notations que nous présentons dans cette partie sont utilisées dans tous les chapitres de cette thèse. Nous notons par :

$\mathrm{L}^{\exp}$ l'espace des variables aléatoires X, $\mathcal{G}_T$-mesurables vérifiant pour tout $\gamma > 0$:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma|X|\right)\right] < \infty.$$

$D_0^{\exp}$ l'espace des processus X progressivement mesurables vérifiant $\forall\gamma > 0$:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma \operatorname{ess\,sup}_{t\leq T}|X_t|\right)\right] < \infty.$$

$D_1^{\exp}$ l'espace des processus X progressivement mesurables tels que $\forall\gamma > 0$:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma\int_0^T |X_s|ds\right)\right] < \infty.$$

$\mathcal{M}^p(\mathbb{P})$ l'espace des $\mathbb{P}$-martingales $M = (M_t)_{t\leq T}$ telles que $\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|M_t|^p) < \infty$

$L^2(\lambda)$ l'espace des processus prévisibles X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tels que

$$\sum_{i=1}^d \mathbb{E}\left[\int_0^T (X_s^i)^2\lambda_s^i ds\right] < \infty$$

$\mathcal{S}^\infty$ l'espace des processus adaptés à valeurs dans $\mathbb{R}$ tels que $|Y|_{S_\infty} = \mathbb{E}\big(\sup_{t\leq T}|Y_t|\big) < \infty$.

$\mathcal{S}^2$ l'espace des processus adaptés X à valeurs dans $\mathbb{R}$ tels que $\mathbb{E}\Big(\sup_{t\leq T}|X_t|^2\Big) < \infty$.

$\mathcal{H}^2$ l'espace des processus adaptés Z à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ tels que $\mathbb{E}\Big(\int_0^T |Z_s|^2 ds\Big) < \infty$.

$\mathcal{U}^{\exp}$ l'espace des $\mathbb{P}-$martingales $M = (M_t)_{t\leq T}$ telles que $\mathcal{E}(M)$ est une martingale uniformément intégrable.

$\mathcal{D}_{\exp}$ l'espace des processus optionnels X tels que $\exp(X) \in \mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des processus appartenant à la classe D.

$\mathrm{L}^1_{\exp}$ l'espace des variables aléatoires X, $\mathcal{G}_T$ mesurables telles que $\mathbb{E}\left[\exp(X)\right] < \infty$.

1.1 Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades à saut et prix d'indifférence dans un modèle avec défauts

1.1.1 Maximisation d'utilité exponentielle et prix d'indifférence dans un modèle avec défauts

Nous nous plaçons dans un marché financier incomplet et notre objectif est de caractériser le prix d'indifférence d'un actif contingent ψ_T non duplicable. Nous nous intéressons à la maximisation de l'espérance de l' utilité de la richesse finale sur un ensemble de stratégies admissibles. Pour résoudre ce probléme, nous utilisons les techniques de contrôle stochastique dynamique (voir cours de St. Flour 1981 de El Karoui [26]). Afin de caractériser la valeur du problème de contrôle, nous utilisons le principe de la programmation dynamique en terme d'Équation Différentielle Stochastique Rétrograde (EDSR), dont le coefficient est à déterminer. Etant donnée l' aversion au risque représentée par une fonction d'utilité exponentielle de paramètre δ positif, le prix de cet actif est donné via le prix d'indifférence de ψ_T en résolvant successivement les problèmes d'optimisation suivants :

$$u^0(x) = \max_{\pi} \mathbb{E}\left[-\exp(-\delta X_T^{x,\pi})\right], \qquad u^{\psi}(x) = \max_{\pi} \mathbb{E}\left[-\exp(-\delta(X_T^{x,\pi} - \psi_T))\right], \quad (1.1)$$

où π^i représente la proportion de richesse investie dans l'actif i, appartenant à un ensemble compact $\mathcal{A}$, x représente la richesse initiale et $X_T^{x,\pi}$ la richesse terminale à l'horizon T. L'application du principe de programmation dynamique nous permet de caractériser la valeur du problème de contrôle par le processus d'état Y où le triplet (Y, Z, U) est solution d'une EDSR associée à (g, ψ_T), avec g défini $\mathbb{P}$-p.s pour tout $t \in [0, T]$ par :

$$g_t(Y_t, Z_t, U_t) = \inf_{\kappa_t \in \bar{\mathcal{A}}_t} \left\{ \frac{1}{\delta} j_t(\delta(U_t - \widetilde{k}_t)) - \widetilde{\kappa}_t.\widetilde{\theta}_t \lambda_t + \frac{\delta}{2} \Big| \bar{\kappa}_t - (Z_t + \frac{\bar{\theta}_t}{\delta}) \Big|^2 - Z_t.\bar{\theta}_t - \frac{|\bar{\theta}_t|^2}{2\delta} \right\}. \quad (1.2)$$

Le processus κ défini par $\kappa_t := \pi_t \sigma_t$ se décompose en $\kappa = (\widetilde{\kappa}, \bar{\kappa})$ avec $\widetilde{\kappa} = (\kappa^1, \cdots, \kappa^d)$ et $\bar{\kappa} = (\kappa^{d+1}, \cdots, \kappa^{d+p})$. La prime de risque minimale $\theta_t = \sigma_t^{tr} (\sigma_t \sigma_t^{tr})^{-1} \mu_t$ est aussi répartie en deux composantes $\widetilde{\theta} = (\theta^1, \cdots, \theta^{d+1})$ et $\bar{\theta} = (\theta^{d+1}, \cdots, \theta^{d+p})$. L'ensemble des stratégies κ_t est défini par $\bar{\mathcal{A}}_t := \mathcal{A}\sigma_t$ pour tout $t \leq T$.

Le coefficient g vérifie :

$$-l_t - z.\bar{\theta}_t - \frac{|\bar{\theta}_t|^2}{2\delta} \leq g_t(y,z,u) \leq \frac{1}{\delta} j_t(\delta u) + \frac{\delta}{2}|z|^2$$

où l est un processus $\mathbb{G}$-adapté et borné. Le coefficient g de l'EDSR est à croissance quadratique en z et exponentielle en u. L'étude des EDSR associées respectivement à (g, ψ_T) et à $(g, 0)$ permet de déterminer la solution des problèmes d'optimisation et de caractériser le prix d'indifférence p de l'actif contingent ψ_T, vérifiant $u^0(x) = u^{\psi}(x+p)$. Ainsi le calcul du prix d'un actif contingent dépendant des défaut est donc calculé en caractérisant la solution d'une EDSR dont le coefficient est à croissance quadratique (en z) et exponentielle (en u).

1.1.2 Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades à sauts

En 1990, motivés par la représentation du processus adjoint en contrôle stochatsique, Pardoux et Peng [60] ont introduit le concept général des Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades(EDSR) comme un couple de processus adaptés (Y, Z) tels que $-dY_t = g_t(Y_t, Z_t)dt - Z_t.dW_t$ avec une condition terminale $Y_T = \psi_T$, où $g_t(y, z)$ est un processus stochastique appelé le coefficient de l'EDSR, et ψ_T est une variable $\mathcal{G}_T$ mesurable. Sous les conditions de carré intégrable des martingales, Peng et Pardoux ont montré que l'EDSR à coefficient Lipschitz admet une unique solution de carré intégrable ; la preuve étant basée sur le théorème du point fixe [60].

En finance, l'application des EDSR a suscité un interêt considérable. En résolvant une EDSR à coefficient linéaire, on peut caractériser la richesse et la stratégie optimale dans le modèle de Black and Scholes (voir [29]). Les EDSR permettent également de résoudre le problème de maximisation de la richesse terminale et permettent ainsi de déduire le prix d'indifférence d'un actif contingent voir ([42]). Nous nous sommes intéressés dans la suite à l' application des EDSR pour caractériser le prix d'un actif contingent dans un modèle présentant des sauts.

D'après l'hypothèse **A1**-2) faite sur la représentation des martingales, pour déduire ce prix dépendant des sauts, il est important de définir de nouveaux types d'EDSR, "les

EDSR à sauts" définies comme un triplet de processus adaptés (Y, Z, U) tel que $-dY_t = g_t(Y_t, Z_t, U_t)dt - Z_t.dW_t - U_t.dN_t$ où la condition terminale $Y_T = \psi_T$ appartient à $\mathcal{G}_T$.

La résolution des EDSR dépend fortement des conditions sur le coefficient g et sur la condition terminale ψ_T, nous montrerons dans la première partie de ce travail, l'existence de la solution dans le cas Lipschitz. La preuve est basée sur des méthodes standards (voir [2] et [57]). En considérant une condition terminale $\psi_T \in L^2(\Omega, \mathcal{G}_T, \mathbb{P})$ et le coefficient g Lipschitz, on montre qu'il existe un triplet (Y, Z, U) solution de l'EDSR $-dY_t = g_t(Y_t, Z_t, U_t)dt - Z_t.dW_t - Y_t.dN_t, Y_T = \psi_T$. De plus :

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2 + \int_0^T |Z_t|^2dt + \int_0^T \sum_{i=1}^d |U_t^i|^2\lambda_t^i dt\Big) \leq C\mathbb{E}\Big(|\psi_T|^2 + \int_0^T |g_t(0,0,0)|^2dt\Big)$$

Pour obtenir un théorème de comparaison dans le cas des EDSR avec sauts, nous avons besoin d'une condition supplémentaire sur les variations du coefficient de l'EDSR par rapport aux sauts. On notera cette condition dans toute la suite la condition (A_γ) définie par :

$$g_t(y, z, u_1) - g_t(t, y, z, u_2) \leq \sum_{i=1}^d \gamma^i(u_1^i, u_2^i)(u_1^i - u_2^i)\lambda_t^i, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d.$$

où le processus γ^i vérifie $-1 + \delta^i \leq \gamma^i(u_1^i, u_2^i) \leq c^i$; $\delta^i, c^i \in \mathbb{R}^+$, pour tout $i = 1, \cdots, d$. Afin de montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'EDSR associée au problème de maximisation (1.1) dont le coefficient est à croissance quadratique-exponentielle, on peut utiliser les arguments standards(voir [57]). Cette méthodologie consiste à définir une suite $(g^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de coefficients Lipschitz vérifiant la condition $(\mathcal{A}_\gamma)$ et convergeant vers le coefficient g de l'EDSR. En notant (Y^n, Z^n, U^n) la solution de l'EDSR associée à (g^n, ψ_T) et en utilisant les caractéristiques de g^n on déduit :

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^n|^2 + \int_0^T |Z_t^n|^2dt + \int_0^T \sum_{i=1}^d |U_t^{n,i}|^2\lambda_t^i dt\Big) \leq C\mathbb{E}\Big(|\psi_T|^2 + \int_0^T |g_t^n(0,0,0)|^2dt\Big)$$

Grâce à des arguments de convergence faible et de convergence forte, on prouve par une méthode standard l'existence de la solution de l'EDSR asscociée à (g, ψ_T) où g est à croissance quadratique-exponentielle. Le but de la première partie de cette thèse est d'établir l'existence de la solution d'une EDSR dont le coefficient est à croissance quadratique-exponentielle en utilisant de nouveaux arguments liés aux semimartingales quadratiques. En effet, la notion des semimartingales quadratiques définies par Barrieu, El Karoui et Xu [5] permet de résoudre plus rapidement ce type d'EDSR. Notre travail et notre apport consisteront à étendre la notion de "semimartingales quadratiques" aux "semimartingales quadratiques-exponentielles" afin de tenir compte des termes en sauts dûs aux défauts. Cette nouvelle notion de semimartingales quadratiques-exponentielles nous permettra de résoudre facilement les EDSR dont le coefficient est à croissance quadratique-exponentielle et nous pourrons déduire de cette étude le prix d'un actif contingent.

1.1.3 Semimartingale quadratique-exponentielle et applications aux EDSR

Dans cette section, notre objectif est l'étude de l'existence et de l'unicité des EDSR dont le coefficient est à croissance quadratique-exponentielle et de valeur terminale non bornée. On introduit la notion de *semimartingale quadratique exponentielle*, s'inspirant de la notion *semimartingale quadratique* développée par Barrieu, El Karoui et Xu [5] dans le cadre de processus continus. Le terme exponentielle fait reférence à la croissance du coefficient par rapport à la variable saut. Cette nouvelle approche est basée sur des outils probabilistes, tels que la décomposition additive de Doob-Meyer, des estimations entropiques et des théorèmes de stabilité pour les semimartingales spéciales. Les arguments utilisés par la méthode de Kobylanski [45] sont plutôt analytiques s'inspirant des travaux de Boccardo, Murat et Puel [10]. En effet, l'approche de Kobylanski repose sur un changement de variable exponentiel, sur les méthodes de troncature et sur les théorèmes de stabilité par passage à la limite.

Nous définissons les semimartingales quadratiques exponentielles comme suit :

Definition 1. *(Semimartingale quadratique-exponentielle) Une semimartingale* $X = X_0 + V + M^c + U.N$ *est appelée semimartingale quadratique-exponentielle* ($q_{\exp}$) *si le triplet* (V, M^c, U) *vérifie la condition de structure* $\mathcal{Q}_{exp}(\Lambda, A, \delta)$ *suivante : il existe des processus* *prévisibles croissants* Λ, A *et une constante positive* δ *telle que :*

$$\begin{aligned} dV_t &\ll d\Lambda_t + |X_t|dA_t + \frac{\delta}{2}d\langle M^c\rangle_t + \frac{1}{\delta}j(-\delta U_t)dt, \\ -\, d\Lambda_t - |X_t|dA_t - \frac{\delta}{2}d\langle M^c\rangle_t - \frac{1}{\delta}j(\delta U_t)dt &\ll dV_t \end{aligned}$$

Ainsi

$$d|V_t| \ll d\Lambda_t + |X_t|dA_t + \frac{\delta}{2}d\langle M^c\rangle_t + \frac{1}{\delta}\big(j(-\delta U_t) + j(\delta U_t)\big)dt$$

où la fonction j *est définie par* $j(u) = \sum_{i=1}^{d}(\exp(u) - u - 1)\lambda^i$ *pour tout* $u = (u^1, \cdots, u^d) \in \mathbb{R}^d$. *En particulier la semimartingale* $X = X_0 + M - \frac{\delta}{2}\langle M^c\rangle - \int_0^\cdot \frac{1}{\delta}j(\delta U_t)dt$ *est appelée semimartingale canonique quadratique-exponentielle, elle est également notée* $X = \mathcal{R}(X_0, M^c, U)$.

Definition 2. *Le processus entropique associé à la variable aléatoire* $\psi_T \in \mathcal{G}_T$ *telle que* $\exp(\delta\psi_T) \in \mathbf{L^1}(\mathbb{P})$ *pour tout* $\delta \in \mathbb{R}$ *est donné par :* $\rho_{\delta,t}(\psi_T) = \frac{1}{\delta}\ln \mathbb{E}[\exp(\delta\psi_T)|\mathcal{G}_t]$. *Un processus optionnel* X *appartenant à la classe* $\mathcal{D}_{\exp}$ *est appelé :*

i) Sous-martingale entropique si pour tout couple de temps d'arrêt (σ, τ), $0 \leq \sigma \leq \tau \leq T$ *:* $\rho_{1,\sigma}(X_\tau) \geq X_\tau, \mathbb{P} - ps.$

ii) Surmartingale entropique si $-X$ *est une sous-martingale entropique, i.e., pour tout couple de temps d'arrêt* (σ, τ), $0 \leq \sigma \leq \tau \leq T$ *:* $\rho_{1,\sigma}(-X_\tau) \geq -X_\tau$ *(équivalent à* $\rho_{-1,\sigma}(X_\tau) \leq X_\sigma, \mathbb{P} - ps.$*)*

iii) Quasi-martingale entropique si X *est une sous-martingale entropique et une surmartingale entropique. Pour tout couple de temps d'arrêt* (σ, τ), $0 \leq \sigma \leq \tau \leq T$ *:*

$$\rho_{-1,\sigma}(X_\tau) \leq X_\sigma \leq \rho_{1,\sigma}(X_\tau), \qquad \mathbb{P} - ps.$$

Pour caractériser une quasi-martingale entropique, il suffit de caractériser une sous-martingale entropique, ce qui est fait en utilisant le théorème de Doob. Soit X une sous-martingale entropique càdlàg adaptée et appartenant à la classe $\mathcal{D}_{\exp}$ alors le processus X admet la décomposition additive :

$$X = M - \frac{1}{2}\langle M^c\rangle - \int_0^\cdot j(U_t)dt + A.$$

où $M = M^c + \int_0^\cdot U_t dN_t$ et le processus A est un processus prévisible croissant.

Ce résultat permet de caractériser les propriétés des sous-martingales entropiques X et $-X$ (bornées, exponentielles intégrables) à partir des propriétes de leurs parties martingales et réciproquement. Par exemple, dans le cas où X est bornée, on peut déduire que sa partie martingale M est de type BMO. Nous utilisons cette approche des semi-martingales quadratiques-exponentielles pour avoir un résultat d'existence pour des EDSR quadratiques avec une condition terminale non bornée. A notre connaissance, ce problème relatif à une condition terminale non bornée dans le cas d'une EDSR à saut n'a pas été résolu dans la littérature.

1.2 Contrôle stochastique robuste et maximisation d'utilité

1.2.1 Robustesse des modèles

Dans cette partie, notre objectif est d'étudier un problème de maximisation d'utilité avec une incertitude sur le choix de la probabilité historique. Nous nous proposons de déterminer la richesse optimale et la consommation optimale d'une utilité robuste ; c'est à dire de résoudre Le problème :

$$\sup_{\pi} \inf_{\mathbb{Q}} \mathbf{U}(\pi, \mathbb{Q}), \tag{1.3}$$

où π appartient à un ensemble des stratégies admissibles (stratégies de portefeuilles, stratégies de consommation, ...), et $\mathbb{Q}$ appartient à $\mathcal{Q}$, l'ensemble des modèles historiques. Dans le cas classique d'un seul modèle connu $\mathcal{Q} = \{\mathbb{P}\}$ avec $\mathbb{P}$ la probabilité de reférence, $\mathbf{U}(\pi, \mathbb{P})$ est donné sous la forme d'une espérance d'utilité sous $\mathbb{P}$ d'une richesse finale et/ou d'une consommation. Le cas où $\mathcal{Q}$ n'est pas réduit à un singleton a été étudié par Lazrak et Quenez [50], Schied [67], Schied et Wu [68], Oksendal et Sulem [59]. Leurs approches sont basées sur la dualité convexe.

Notre approche alternative est basée sur une méthode de pénalisation : nous introduisons dans $\mathbf{U}(\pi, \mathbb{P})$ un terme de pénalisation qui dépend seulement de $\mathbb{Q}$ (pas de π) et nous optimisons sur un espace plus large que $\mathcal{Q}$. Ce modéle a été introduit par les économistes Anderson, Hansen and Sargent [1] dans un cadre Markovien en utilisant formellement des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman associées au probléme. Bordigoni, Matoussi et

Schweizer ont fait une étude mathématique de la partie minimisation du problème (1.3) dans un cadre général des semimartingales.

Notre contribution est d'étudier une problème de *max min* dans une filtration discontinue engendrée par les sauts et une filtration de référence continue. Nous nous plaçons sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$. Nous considérons l'ensemble des modèles $\mathcal{Q} := \{\mathbb{Q}\ \text{ probabilité sur } \Omega \text{ t.q. } \mathbb{Q} \ll \mathbb{P}\ \text{ sur }\ \mathcal{G}_T\}$ tel que le processus densité $Z^{\mathbb{Q}}$ est une $\mathbb{P}$-martingale càdlàg

$$Z_t^{\mathbb{Q}} \quad = \quad \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\,|_{\mathcal{G}_t} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\,|\,\mathcal{G}_t]$$

Nous identifions $Z^{\mathbb{Q}}$ avec $\mathbb{Q}$ dans notre problème d'optimisation. Nous notons par $S_t^\delta := \exp(-\int_0^t \delta_s\, ds)$ le processus d'escompte avec un taux $\delta = (\delta_t)_{0\le t\le T}$ et on se donne la fonction coût suivante

$$c(\omega, \mathbb{Q}) := \mathcal{U}_{0,T}^\delta(\mathbb{Q}) + \mathcal{R}_{0,T}^\delta(\mathbb{Q})\ .$$

avec $\mathcal{U}_{t,T}^\delta(\mathbb{Q})$ est le terme d'utilité actualisé donné par

$$\mathcal{U}_{t,T}^\delta(\mathbb{Q}) \quad = \quad \int_t^T \frac{S_s^\delta}{S_t^\delta}\widetilde{U}_s\, ds + \frac{S_T^\delta}{S_t^\delta}\bar{U}_T$$

où $\widetilde{U} = \left(\widetilde{U}_t\right)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{D}_1^{\exp}$ représente le processus de consommation, $\bar{U}_T \in \mathrm{L}^{\exp}$ représente la richesse finale et $\mathcal{R}_{t,T}^\delta(\mathbb{Q})$ représente le terme de pénalité donné par

$$\mathcal{R}_{t,T}^\delta(\mathbb{Q}) \quad = \quad \int_t^T \delta_s \frac{S_s^\delta}{S_t^\delta} \log\frac{Z_s^{\mathbb{Q}}}{Z_t^{\mathbb{Q}}}\, ds + \frac{S_T^\delta}{S_t^\delta}\log\frac{Z_T^{\mathbb{Q}}}{Z_t^{\mathbb{Q}}}.$$

Nous nous proposons de résoudre le problème de contrôle suivant

$$\text{minimiser} \quad \mathbb{Q} \longmapsto \Gamma(\mathbb{Q}) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[c(.,\mathbb{Q})\big] \tag{1.4}$$

sur l'espace des probabilités $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sur $\mathcal{G}_T$. On note que $\Gamma(\mathbb{Q})$ représente $\mathbf{U}(\pi, \mathbb{Q})$ pour un π fixé associé au couple consommation-richesse. Nous notons dans la suite $\mathcal{P}(\widetilde{U}, \bar{U}_T)$ le problème d'optimisation précédent.

En utilisant la probabilité de référence $\mathbb{P}$, $\Gamma(\mathbb{Q})$ s'écrit :

$$\Gamma(\mathbb{Q}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[Z_T^{\mathbb{Q}}\Big(\int_0^T S_s^\delta \widetilde{U}_s\, ds + S_T^\delta \bar{U}_T\Big)\right] +\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \delta_s S_s^\delta Z_s^{\mathbb{Q}} \log Z_s^{\mathbb{Q}}\, ds + S_T^\delta Z_T^{\mathbb{Q}} \log Z_T^{\mathbb{Q}}\right]. \tag{1.5}$$

Le deuxième terme de la dernière expression fait apparaître *l'entropie relative de* $\mathbb{Q}$ *par rapport* $\mathbb{P}$ *sur* $\mathcal{G}_T$:

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) := \begin{cases} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\log Z_T^{\mathbb{Q}}\right], & \text{si } \mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \text{ sur } \mathcal{G}_T \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce terme exprime le choix du modèle $\mathbb{Q}$ par rapport à la probabilité de référence $\mathbb{P}$ car l'entropie relative représente une "distance" entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$. Plus particulièrement nous définissons $\mathcal{Q}_f$ comme l'ensemble des probabilités $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{G})$ telles que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sur $\mathcal{G}_T$, $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$ sur $\mathcal{G}_0$ et $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) < \infty$ et nous notons par $\mathcal{Q}_f^e := \{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_f \,|\, Q \approx P \text{ on } \mathcal{G}_T\}$.
Bordigoni, Matoussi et Schweizer [13] ont prouvé l'existence d'une unique probabilité optimale, solution de (1.4) en considérant une filtration générale. Notre contribution consiste dans l'utilisation du principe de programmation dynamique pour décrire la valeur du problème de contrôle avec des EDSRs généralisées. De plus, nous caractérisons la densité optimale $Z^{\mathbb{Q}^*}$ dans le cadre de la filtration discontinue.

Considérons l'EDSR à sauts à coefficient quadratique-exponentiel :

$$\begin{cases} -dY_t = \Big[-j(-y_t) + \widetilde{U}_t - \delta_t Y_t\Big]dt - \frac{1}{2}d\langle M^{Y,c}\rangle_t - dM_t^{Y,c} - y_t.dN_t \\ Y_T = \bar{U}_T \end{cases} \tag{1.6}$$

La solution de cette équation est un triplet $(Y, M^{Y,c}, y)$ tel que Y est une semimartingale, $M^{Y,c}$ est une martingale locale continue de carré intégrable nulle en 0 et $y = (y^1, \cdots, y^d)$ est un processus prévisible localement borné à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Le cas $\delta \equiv 0$ a été étudié par Schroder et Skiadas [71] dans le cadre d'une filtration Brownienne au moyen des EDSR particulières quadratiques en Z avec une condition finale non bornée. Ils ont considéré également le même type de problème mais d'un point de vue de l'utilité différentielle récursive introduite par Duffie et Epstein [20]. Soit $(Y, M^{Y,c}, y)$ solution de l'EDSR (1.6) et supposons que $Z = \mathcal{E}(L)$ est une $\mathbb{P}$-martingale où

$$dL_t = -dM_t^{Y,c} + \sum_{i=1}^{d}\left(e^{-y_t^i} - 1\right)dN_t^i, \quad L_0 = 0. \tag{1.7}$$

Ainsi, Y satisfait la récursivité suivante donnée par [BMS] : pour tout temps d'arrêt τ à valeurs dans $[t,T]$,

$$Y_t = -\ln \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\Big(-Y_\tau + \int_t^\tau (\delta_s Y_s - \widetilde{U}_s)ds\Big)\Big|\mathcal{G}_t\right] \tag{1.8}$$

On établit l'existence et l'unicité de la solution de l'EDSR quadratique-exponentielle (1.6), ce qui permettra de déduire le modèle optimal.

Theorême : Il existe un unique triplet $(Y, M^{Y,c}, y) \in \mathcal{D}_0^{\exp} \times \mathcal{M}^p(\mathbb{P}) \times \mathrm{L}^2(\lambda)$ solution de (1.6). De plus, le modèle optimal $\mathbb{Q}^*$ est solution de (1.4) et admet pour densité Radon-Nikodym par rapport à $\mathbb{P}$, $Z^{\mathbb{Q}^*} = \mathcal{E}(L)$ où L est donné en (1.7).

Nous obtenons également que l'unique solution de l'EDSR (1.6) est donnée par $(V, M^{V,c}, v)$ où V est le processus valeur associé au problème d'optimisation $\mathcal{P}(\widetilde{U}, \bar{U}_T)$. De plus, nous montrerons que $-V$ définit une mesure de risque dynamique du couple utilité $(\widetilde{U}, \bar{U}_T)$. En considérant $\delta = 0$ et le couple $(0, \bar{U}_T)$, on retrouve la mesure de risque entropique de $-\bar{U}_T$ définie par Barrieu et El Karoui [6].

Definition 3. *Pour deux variables aléatoires X et Y, nous définissons $X \leq Y$ pour $X \leq Y$ p.s.*

Pour deux processus A et B, nous définissons $A \leq B$ pour $A_t \leq B_t, \forall t \in [0,T], p.s.$, nous définissons $(X, A) \leq (Y, B)$ si $X \leq Y$ p.s et $A \leq B$.

La solution $(Y, M^{Y,c}, y)$ de l'EDSR à sauts quadratique-exponentielle dépend du couple $(\widetilde{U}, \bar{U}_T)$. Bien que le coefficient de l'EDSR (1.6) est à croissance quadratique-exponentielle, on pourra comparer les solutions de ces EDSR en faisant varier le couple $(\widetilde{U}, \bar{U}_T)$. En effet, supposons pour $k = 1, 2$, $(Y^k, M^{k,c}, y^k)$ est solution de l'EDSR (1.6) associée à $(\widetilde{U}^k, \bar{U}_T^k)$. En supposant, $(\widetilde{U}^1, \bar{U}_T^1) \leq (\widetilde{U}^2, \bar{U}_T^2)$, on obtient $Y_t^1 \leq Y_t^2, \quad dP \otimes dt$. De ce théorème de comparaison, on peut déduire l'unicité de la solution de l'EDSR (1.6). C'est une réponse alternative à la preuve de l'unicité de la solution de L'EDSR (dans le cas continu) faite par Bordigoni, Matoussi et Schweizer [13] en utilisant la relation de récursivité. De même en utilisant les EDSR on pourra donner une réponse alternative à la preuve de la concavité du processus valeur par rapport au couple $(\widetilde{U}, \bar{U}_T)$ obtenue par Bordigoni [12] dans sa thèse en utilisant les arguments d'analyse fonctionnelle.

En effet, considérons l'application $F : (\widetilde{U}, \bar{U}) \longrightarrow F(\widetilde{U}, \bar{U}) = V$ où $(V, M^{V,c}, v)$ est la solution associée à $(\widetilde{U}, \bar{U}) \in \mathcal{D}_1^{\exp} \times L^{\exp}$. L'application F est concave, pour tout $\theta \in (0,1)$ et $(\widetilde{U}^1, \bar{U}_T^1), (\widetilde{U}^2, \bar{U}_T^2)$ appartenant à leurs espaces respectifs, on a :

$$F\left(\theta\widetilde{U}^1 + (1-\theta)\widetilde{U}^2, \theta\bar{U}_T^1 + (1-\theta)\bar{U}_T^2\right) \geq \theta F(\widetilde{U}^1, \bar{U}_T^1) + (1-\theta)F(\widetilde{U}^2, \bar{U}_T^2).$$

On a montré d'une part que l'application F est croissante et d'autre part qu'elle est concave. En supposant que $\bar{U}_T = \bar{U}(\psi)$ représente l'utilité de la richesse terminale et $\widetilde{U} = U(c)$ représente l'utilité de la consommation, nous déterminons le contrôle optimal (c, ψ) qui maximise V_0 où $(V, M^{V,c}, v)$ est solution de l'EDSR (1.6). Afin de caractériser le contrôle optimal (c^*, ψ^*), nous avons étudié la régularité (continuité, la concavité et la différentiabilité) de la fonction d'état V de l'EDSR (1.6) par rapport à ce contrôle. La difficulté majeure est l'étude de toutes ces propriétés de l'EDSR (1.6) par rapport au paramètre de contrôle en notant que son coefficient est quadratique-exponentiel et que sa condition terminale est exponentiellement intégrable. A notre connaissance, l'étude des EDSR par rapport à un paramètre de contrôle n' est faite dans la littérature que dans le cas d'un coefficient Lipschitz (voir El Karoui, Peng et Quenez [27]).

1.2.2 Maximisation de la consommation et de la richesse terminale sous le modèle optimal

Dans cette partie nous notons $c = (c_t)_{0 \leq t \leq T}$ le processus adapté représentant la consommation de l'investisseur, et nous notons ψ sa richesse terminale. Nous supposerons que l'investisseur possède une richesse initiale x et que la probabilité risque neutre du marché est donnée par $\widetilde{\mathbb{P}}$. L'ensemble admissible $\mathcal{A}(x)$ sera défini par $(c, \psi) \in \mathcal{H}^2([0,T]) \times \mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{G}_T)$ tel que

$$\mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T c_t dt + \psi\right] \leq x\,,$$

Nous considérons deux fonctions d'utilités U et $\bar{U}$ satisfaisant les conditions habituelles et nous posons $\widetilde{U} = (U(c_t))_{0 \leq t \leq T}$ et $\bar{U}_T = \bar{U}(\psi)$ et nous notons par $\mathbb{Q}^*$ la mesure optimale déterminée précédemment. Nous cherchons à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\sup_{(c,\psi)\in\mathcal{A}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\int_0^T S_s^\delta U(c_s)ds + S_T^\delta \bar{U}(\psi)\right] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\int_0^T \delta_s S_s^\delta \ln Z_s^{\mathbb{Q}^*} ds + S_T^\delta \ln Z_T^{\mathbb{Q}^*}\right]$$
$$= \sup_{(c,\psi)\in\mathcal{A}(x)} V_0^{x,\psi,c}$$

Résoudre ce second problème d'optimisation revient donc à étudier une EDSR quadratique-exponentielle dépendant des paramètres (c,ψ). Pour montrer l'existence d'un paramètre de contrôle optimal, il suffit de montrer la semi-continuité supérieure de V_0 par rapport au paramètre de contrôle. L'unicité découle de la concavité de V_0, conséquence de la concavité des fonctions d'utilités U et $\bar{U}$.

Toutefois, la caractérisation de ce paramètre reste difficile car les arguments du principe de maximum sont satisfaits si l'EDSR est différentiable par rapport au paramètre de contrôle. En effet considérons le paramètre optimal (c^*,ψ^*) du problème d'optimisation non contraint :

$$\max_{(c,\psi)\in\mathcal{A}(x)} \{V_0^{x,c,\psi} - \nu(X_0^{x,c,\psi} - x)\}, \quad \nu > 0,$$

où $X_0^{x,c,\psi} = \mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T c_s ds + X_T^{x,c,\psi}\right]$. Pour tout paramètre de contrôle $(c,\psi)\in\mathcal{A}(x)$ et pour tout $\epsilon\in(0,1)$, posons $c^\epsilon = c^* + \epsilon(c-c^*)$ et $\psi^\epsilon = \psi^* + \epsilon(\psi-\psi^*)$, ainsi $\left(c^\epsilon,\psi^\epsilon\right)\in\mathcal{A}(x)$ car $\mathcal{A}(x)$ est un ensemble convexe. En utilisant le principe du maximum, on obtient :

$$V_0^{x,c^*,\psi^*} - \nu(X_0^{x,c,^*\psi^*} - x) \geq V_0^{x,c^\epsilon,\psi^\epsilon} - \nu(X_0^{x,c^\epsilon,\psi^\epsilon} - x).$$

Posons $\partial_\epsilon V_0^{x,c^*,\psi^*} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(V_0^{x,c^\epsilon,\psi^\epsilon} - V_0^{x,c^*,\psi^*})$ et $\partial_\epsilon X_0^{x,c^*,\psi^*} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(X_0^{x,c^\epsilon,\psi^\epsilon} - X_0^{x,c^*,\psi^*})$, on en déduit :

$$\partial_\epsilon V_0^{x,c^*,\psi^*} - \nu\partial_\epsilon X_0^{x,c^*,\psi^*} \leq 0 \tag{1.9}$$

Pour caractériser le paramètre optimal solution du problème non contraint, il suffit donc de caractériser les différentielles des variables $X_0^{x,c,\psi}$ et $V_0^{x,c,\psi}$ par rapport au paramètre de contrôle si celles-ci existent. La variable $X_0^{x,c,\psi}$ étant linéaire en (c,ψ), on déduit :

$$\partial_\epsilon X_0^{x,c^*,\psi^*} = \mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T (c_s - c_s^*)ds + (\psi-\psi^*)\right].$$

L'existence et la caractérisation de la différentielle de $V_0^{x,c,\psi}$ est plus complexe vu la forme quadratique-exponentielle de l'EDSR (1.6). La proposition suivante nous permet de déduire l'existence de cette différentielle afin de caractériser le paramètre optimal.
Soient V^{x,c^*,ψ^*} et $V^{x,c^\epsilon,\psi^\epsilon}$ les processus valeur associés aux problèmes d'optimisation $\mathcal{P}(U(c^*),\bar{U}(\psi^*))$ et $\mathcal{P}(U(c^\epsilon),\bar{U}(\psi^\epsilon))$. La limite $\partial_\epsilon V^{x,c^*,\psi^*} := \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(V^{x,c^\epsilon,\psi^\epsilon} - V^{x,c^*,\psi^*})$ existe, et il existe un unique triplet $(\partial_\epsilon V^{x,c^*,\psi^*}, \partial_\epsilon M^{V,c}, \partial_\epsilon v)$ solution de L'EDSR :

$$-d\partial_\epsilon V_t^{x,c^*,\psi^*} = -(\delta\partial_\epsilon V_t + U'(c_t^*)(c_t - c_t^*))dt - d\partial_\epsilon M_t^{V,c} - \partial_\epsilon v_t.dN_t^*, \quad \partial_\epsilon V_T = \bar{U}'(\psi^*)(\psi-\psi^*).$$

où le processus $\partial_\epsilon M^{V,c}$ est une $\mathbb{Q}^*$-martingale de carré intégrable, $\partial_\epsilon v$ est un processus prévisible d-dimensionnel et le processus N^* est la partie $\mathbb{Q}^*$ martingale de la Q^* semimartingale N.
On déduit ainsi :

$$\partial_\epsilon V_t^{x,c^*,\psi^*} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\frac{S_T^\delta}{S_t^\delta}\bar{U}'(\psi^*)(\psi-\psi^*) + \int_t^T \frac{S_s^\delta}{S_t^\delta}U'(c_s^*)(c_s - c_s^*)ds\Big|\mathcal{G}_t\right]$$

En utilisant le principe du maximum via l'inégalité (1.9), on déduit le paramètre de contrôle optimal (c^0,ψ^0) solution du problème d'optimisation contraint. Soient I et $\bar{I}$ les inverses des fonctions U' et $\bar{U}'$. Le plan de consommation optimal (c^0,ψ^0) qui résout le second problème d'optimisation est donné par les équations implicites :

$$c_t^0 = I\left(\frac{\nu^0}{S_t^\delta}\frac{Z_t^{\widetilde{\mathbb{P}}}}{Z_t^{\mathbb{Q}^*}}\right) \qquad dt\otimes d\mathbb{P} \text{ p.s },\qquad \psi^0 = \bar{I}\left(\frac{\nu^0}{S_T^\delta}\frac{Z_T^{\widetilde{\mathbb{P}}}}{Z_T^{\mathbb{Q}^*}}\right) \text{ p.s.} \tag{1.10}$$

où $\nu^0 > 0$ satisfait :

$$\mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T I\left(\frac{\nu^0}{S_t^\delta}\frac{Z_t^{\widetilde{\mathbb{P}}}}{Z_t^{\mathbb{Q}^*}}\right)dt + \bar{I}\left(\frac{\nu^0}{S_T^\delta}\frac{Z_T^{\widetilde{\mathbb{P}}}}{Z_T^{\mathbb{Q}^*}}\right)\right] = x. \tag{1.11}$$

On retrouve les résultats de Karatzas et Shreve (voir [48]) dans le cas où $\mathcal{Q} = \{\mathbb{P}\}$. L'approche EDSR nous permet de déterminer la densité optimale $\mathbb{Q}^*$ et de caractériser le paramètre de contrôle optimal. Notre contribution a été d'utiliser cette approche pour caractériser l'optimal (c^0,ψ^0) dans une filtration discontinue en différentiant une EDSR à croissance quadratique-exponentielle.

1.3 Méthodes numériques et calcul du prix d'un dérivé de crédit

Cette partie repose sur les différentes méthodes de calcul des prix des dérivés de crédit. Nous travaillons dans deux cadres : le cadre statique et le cadre dynamique.

Dans le cadre statique nous mettons en évidence les méthodes de pricing basées sur les différentes copules : gaussiennes , Student, Double-T. Nous discutons sur les mt́hodes de calibration des dérivés de crédit non standard basée sur "la base-correlation".

Dans le cadre dynamique, nous étudions comment simuler la dynamique d'un spread de dérivé de crédit en s'attardant principalement sur deux approches : approche Bottom up et l'approche Top down.

1.3.1 Cadre statique

Definition 4. *Une copule est une fonction de distribution multivariée dont les marginales sont uniformément distribuées sur* $[0, 1]$.

Propriétés 1. *Une copule n-dimensionnelle* C *:*$[0, 1]^n \to [0, 1]$*,* $n \in \mathbb{N}$ *est une fonction qui possède les propriétés suivantes, pour tout* $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in [0, 1]^n$ *:*

- C *est croissante en chaque composante* u_i *pour tout* $i = 1 \cdots n$.
- *S'il existe une composante* u_i *nulle,* $C(u) = 0$.
- *Pour tout* $i = 1, \cdots, n$, $C(1, 1, \cdots, u_i \cdots, 1, 1) = u_i$.

Theorème (SKLAR)
Soit F une fonction de distribution $n-$ multivariée dont les marginales F_{X_i} sont connues pour tout $i = 1 \cdots n$. Il existe une fonction copule C telle que pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n)$

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \cdots, F_{X_n}(x_n))$$

Cette fonction est unique si pour tout $i = 1, \cdots, n$, F_{X_i} est continue On déduit du théorème de SKLAR :

$$C(u_1, \cdots, u_n) = F(F_{X_1}^{-1}(u_1), \cdots, F_{X_n}^{-1}(u_n))$$

Exemples de copules

Copule gaussienne

Soit R une matrice symétrique définie positive telle que chaque terme de la diagonale vaut 1, on définit la copule gaussienne $n-$dimenssionnelle par :

$$C(u_1, \cdots, u_n, R) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \cdots, \Phi^{-1}(u_n))$$

pour tout $u = (u_1, \cdots, u_n)$ où Φ_R est la fonction de distribution d'une gaussienne $n-$multivariée dont la matrice de covariance est égale à R, la fonction de densité de cette gausienne est définie par :

$$f_R(x) = \frac{1}{\sqrt{detR \times (2\pi)^n}} e^{\frac{1}{2}x'R^{-1}x}$$

où $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

Copule de Student

On considère toujours la même matrice R et on définit la copule de Student de paramètre ν par :

$$C(u_1, \cdots, u_n, \nu, R) = t_{R,\nu}(t_\nu^{-1}(u_1), \cdots, t_\nu^{-1}(u_n))$$

Pour tout $u = (u_1, \cdots, u_n)$, où $t_{R,\nu}$ est la fonction de distribution d'une loi de Student n-mutivariée dont la matrice de covariance est égale à R.

Copule de Clayton

Soit $u = (u_1, \cdots, u_n) \in [0, 1]^n$ et $\theta > 0$ on définit la copule de Clayton par :

$$C(u_1, \cdots, u_n) = \left[\sum_{i=1}^{n} u_i^{-\theta} - n + 1\right]^{\frac{-1}{\theta}}$$

Connaissant les marginales correspondant aux probabilités de survie de chaque entité, on utilisera les copules pour déterminer la probabilité jointe de survie, paramètre essentiel pour implémenter le prix des dérivés de crédit car ce prix pourra toujours s'écrire comme une espérance de la perte due aux défauts des entités.

1.3.2 Cadre dynamique

Approche Bottom up

L'approche Bottom up consiste à construire l'intensité de défaut de chaque entité et la probabilité jointe de survie afin de déterminer le prix du dérivé de crédit. Nous nous attardons dans cette partie sur le modèle d'Herbertsson [41]. Nous supposerons de plus que les temps de défaut $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_d$ sont "échangeables" en supposant que chaque entité présente les mêmes spécificités ; ainsi l'intensité de la firme i, $\lambda^i = \lambda$ est définie par :

$$\lambda_t = a + \sum_{k=1}^{d-1} b_k \mathbf{1}_{T_k \leq t}, \qquad t \geq 0 \tag{1.12}$$

où $(T_k)_{1 \leq k \leq d}$ représentent les temps ordonnés des temps de défaut, $a > 0$ et $b_1, \cdots b_{d-1}$ sont tels que $\lambda > 0$.

Proposition 1. *(Hebertsson). Il existe un processus de Markov $(Y_t)_{t \geq 0}$ sur un espace d'état fini $E = \{0, 1, 2, , \cdots, d\}$ tel que les temps d'arrêts :*

$$T_k = \inf\{t > 0 : Y_t = k\}, \qquad k = 1, \cdots d$$

sont des temps ordonnés des d temps de défaut échangeables $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_d$ dont les intensités sont définies par (1.12). Le générateur $\mathbb{Q}$ de Y est donné par :

$$Q_{k,k+1} = (d-k)\left(a + \sum_{j=1}^{k} b_j\right), \quad Q_{k,k} = -Q_{k,k+1} \text{ pour tout } k = 0, 1 \cdots, d-1$$

Les autres termes de la matrice Q valent zéro, ce processus de Markov commence à l'état $\{0\}$.

En utilisant les propriétés des processus de Markov et l'échangeabilité des temps de défaut, nous déduisons les probabilités jointes de survie nécéssaires pour le calcul du prix des dérivés de crédit.

Proposition 2. *Considérons les d entités dont les intensités sont définies par* (1.12). *Soit $q \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq d$, on obtient :*

$$\mathbb{P}(\tau_1 \geq t, \cdots \tau_q \geq t) = \alpha e^{Qt} s^{(q)}, \qquad \mathbb{P}(\tau_1 \geq t, \cdots \tau_q \geq t | Y_t = j) = \frac{C_{d-j}^q}{C_d^q} \text{ pour } j \leq d - q$$

où $\alpha = (1, 0, \cdots 0)$ représente la distribution initiale sur E et $s_j^{(q)} = \frac{C_{d-j}^q}{C_d^q}, 1 \leq j \leq d$.

Approche Top down

Le principe de l'Approche Top down est de simuler directement le processus de pertes d'un panier de dettes afin de calculer le prix des dérivés de crédit. Pour mieux étudier cette approche, nous avons utilisé la méthode de Schönbucher [69] où le processus de perte et les probabilités conditionnelles de perte utiles dans le calcul des prix sont donnés par les définitions suivantes :

Definition 5. *Processus de perte et probabilités conditionnelles.*

– *Le processus de perte à la date $t \in [0, T]$ est donné par :*

$$L_t = \sum_{i=1}^{d} \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}.$$

– *Le vecteur de probabilité conditionnelle du nombre de défaut à la date T étant données les informations à la date t, le vecteur $p(t, T) = (p_0(t, T), \cdots, p_d(t, T))$ est défini par :*

$$p_n(t, T) = \mathbb{P}\left(L(T) = n | \mathcal{G}_t\right), \qquad 0 \leq n \leq d.$$

Hypothèse A2 : On supposera dans la suite que le processus de perte est une chaîne de Markov inhomogène et qu'il existe une matrice de transition $A(.T) = [(a_{i,j}(., T)]_{1 \leq i,j \leq d}$ telle que le vecteur de probabilité conditionnelle satisfait l'équation de Kolmogorov :

$$\frac{\partial}{\partial T} p(t, T) = A(t, T).p(t, T), \qquad t \leq T.$$

Les coefficients de la matrice A vérifient pour tout $t \in [0, T]$, $0 \leq i \leq d : \sum_{j=1}^{d} a_{i,j}(t, T) = 0$. Etant donnée la matrice de transition A, on peut simuler les prix des dérivés de crédit en utilisant la relation récursive sur les probabilités conditionnelles induite par l'hypothèse précédente :

$$P_{n,m}(t,T) = \begin{cases} 0 \quad m < n \\ \exp\left(-\int_t^T a_n(t,s)ds\right) \quad m = n \\ P_{m,m}(t,T)\int_t^T \sum_{k=n}^{d-1} \frac{P_{n,k}(t,s)}{P_{m,m}(t,s)} a_{k,m}(t,s)ds \quad m > n \end{cases}$$

Les résultats numériques et les différentes méthodes employées sont donnés plus en détail dans le dernier chapitre de cette thèse.

Chapitre 2

Quadratic Backward Stochastic Equations with jumps and utility maximization

2.1 Introduction

We study a class of exponential-quadratic BSDE with jumps by considering the point of view based on estimates of the state solution by entropic-semimartingale and by using stability theorem for semimartingales. Moreover, we apply this result to solve a exponential utility maximization problem in a market involving defaultable assets. We show that the value function of the problem is the unique solution of class of an exponential-quadratic BSDE with jumps.

Backward stochastic differential equations (in short BSDE's) were first introduced by Bismut in 1973 [9] as equations for the adjoint process in the stochastic version of Pontryagin maximum principle. Pardoux and Peng [60] generalized the notion in 1990 and were the first to consider general BSDE's and to solve the question of existence and uniqueness.

In a continuous filtration, a solution for a BSDE associated with a coefficient

$g(t, \omega, y, z)$ and a terminal value ξ_T is a pair of square integrable adapted (*w.r.t.* the Brownian filtration) processes $(Y_t, Z_t)_{t \le T}$ such that :

$$Y_t = \xi_T + \int_t^T g_s(\omega, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s . dW_s, \quad t \le T. \tag{2.1}$$

When the function g is Lipschitz continuous with respect to (y, z) and $\xi_T \in L^2(\Omega)$, Pardoux and Peng proved, in their seminal paper [60], the existence and uniqueness of a solution for (2.1).

Since then, BSDE's have been widely used in stochastic control and in particular in mathematical finance, mainly because any pricing problem (in a replication sense) can be written in terms of linear BSDEs, or non-linear BSDEs when portfolios constraints are taken into account see El Karoui, Peng and Quenez [27].

Another direction which has attracted many works in this area, especially in connection with applications, is how to improve the existence/uniqueness conditions of a solution for (2.1). When the functions g and ξ_T are valued in $\mathbb{R}$, many articles have presented weakest existence conditions of a solution for (2.1). Particularly in those papers, it is only assumed that g is continuous and satisfies a quadratic growth condition. Among them, we can quote Kobylanski [45] and Lepeltier and San Martin [51]. In all of these works, the terminal condition is assumed to be bounded, and the main tools are an exponential change of variable, truncation procedure and comparison theorem of solutions of BSDE's. Nonetheless, note that in general we do not have uniqueness of the solution. In [45] a uniqueness result is given by adding a more stronger conditions on the coefficient.

This latter model of BSDE's is very useful in mathematical finance when one deals with exponential utilities or risk measure theory, especially for weather derivatives (see e.g. El Karoui and Rouge [30], Mania and Schweizer [56], Hu, Imkeller and Müller [42], Barrieu and El Karoui [6] and Becherer ([7, 8])). Actually, it has been shown in [30], that in a market model with constraints on the portfolios, if we define the indifference price for a claim ξ as the smallest number p such that $\sup_\pi \mathbb{E}[-e^{-\delta(X_T^{x+p,\pi} - \xi)}] \ge \sup_\pi \mathbb{E}[-e^{-\delta X_T^{x,\pi}}]$ where $X^{x,\pi}$ is the wealth associated with the portfolio π and initial value x, then this problem turns into the resolution of a BSDE with quadratic growth coefficient. Finally let us point out that control risk-sensitive problems turn into BSDE's which fall in the same framework in El Karoui and Hamadène [31]. Our work was also motivated by solving a utility maximization problem of terminal wealth with exponential utility function in models involving defaultable assets. Therefore we need to consider Backward Differential Equations with jumps of the form

$$Y_t = \psi_T + \int_t^T g_s(Y_s, Z_s, U_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s - \sum_{i=1}^{d} \int_t^T U_s^i dN_s^i. \tag{2.2}$$

where for each $i = 1, \cdots, d$, N^i is the martingale associated to a counting process H^i (see section 2.2 for more details on the model). A solution of such BSDE associated with (g, ψ_T) is a triple of square integrable processes $(Y_t, Z_t, U_t)_{0 \leq t \leq T}$. The standard BSDE's with jumps driven by Lipschitz coefficient was first introduced by Barles, Buckdahn and Pardoux [3] in order to give a probabilistic interpretation of viscosity solution of semilinear integral-Partial equations. Afterwards the case of BSDE's with jumps and quadratic coefficient was studied by Becherer [8] and Morlais [57] in the context of exponential utility maximization problem in model involving jumps. In the both papers ([8], [57]), the authors have used in the case of bounded terminal condition the Kobylanski method in the jump setting. As a consequence, they obtain that the state process Y and the jump components U of the BSDE solution are uniformly bounded, and that the martingale component is a BMO-martingale. Moreover, the so-called Kobylanski method is based on analytical point view inspired from Boccardo, Murat and Puel paper [10] and it is based on the exponential change of variables, truncation procedure and stability theorem. Therefore, one of the main difficulty in this method is the proof of the strong convergence in the martingale part approximation. More recently, Tevzadze [74] proposed a new method to get the existence and uniquness of the solution of quadratic BSDE's. The method is based on a fixed point theorem but for only bounded terminal condition with small L^∞-norm. Our main task in this paper is to deal with quadratic BSDE's with non-bounded terminal value and jumps which appear in the dynamics of credit derivatives. Our point of view is inspired from Barrieu, EL Karoui and Xu [5] where they study the continuous case. By adopting a forward point of view, we shall characterize first a solution of BSDE's as a quadratic Itô semimartingale Y, with a decomposition satisfying the *quadratic exponential structure condition* $\mathcal{Q}_{exp}(l, a, \delta)$, where the term *exponential* refers to the exponential feature of the jump coefficient which appears in the generator of the BSDE. More precisely, we assume that : there exists two constants $a \geq 0$ $\delta > 0$, and an adapted process $(l_t)_{t\geq 0}$ such that :

$$-|l_t| - a|y| - \frac{1}{2}\delta|z|^2 - \frac{1}{\delta}j_t(-\delta u) \leq g_t(y,z,u) \leq |l_t| + a|y| + \frac{1}{2}\delta|z|^2 + \frac{1}{\delta}j_t(\delta u),\ a.s.$$

where $j_t(u) = \sum_{i=1}^{d}(e^{u^i} - u^i - 1)\lambda_t^i$. The canonical structure $\mathcal{Q}_{exp}(0,0,\delta)$ will play a essential role in the construction of the solution associated to generale $\mathcal{Q}_{exp}(l,a,\delta)$ structure condition. The simplest generator of a quadratic exponential BSDE, called the *canonical generator*, is defined as $g_t(y,z,u) = q_\delta(z,u) = \frac{\delta}{2}|z|^2 + \frac{1}{\delta}j(\delta u)$. For a given random variable ψ_T, we call *entropic process*, the process defined as $\rho_{\delta,t}(\psi_T) = \frac{1}{\delta}\ln\mathbb{E}\left[\exp(\delta\psi_T)\Big|\mathcal{G}_t\right]$ which is a solution of the canonical BSDE's associated with the coefficient q_δ and final condition ψ_T. This is a entropic dynamic risk measure which have been studied, by Barrieu and El Karoui in [6].

The backward point of view of our approach permits to relate the quadratic BSDEs to a quadratic exponential semimartingale with structure condition $\mathcal{Q}_{exp}(l,a,\delta)$, using the entropic processes. Namely, a semimartingale X with non bounded terminal condition ψ_T and satisfying the structure condition $\mathcal{Q}_{exp}(l,a,\delta)$, yields the following dominated inequalities :

$$\rho_{-\delta,t}(\underline{U}_T) \leq X_t \leq \rho_{\delta,t}(\overline{U}_T), \quad \forall t \in [0,T] \tag{2.3}$$

where $\underline{U}_T$ and $\overline{U}_T$ are two random variables depending only on l, a, δ and ψ_T. Briand and Hu [14] prove implicitly the inequalities (2.3) in the proof of the existence of the solution of a quadratic BSDE, using Kobylanski method and localization procedure. The main goal in our approach is then to deduce, from this dominated inequalities, a structure properties on the martingale part and the finite variation part of X. Indeed, we obtain the canonical decomposition of an entropic quasimartingale which is a semimartingale which satisfies (2.3) as a canonical quadratic semimartingale part plus an predictable increasing process. This Doob type decomposition helps us to define a general quadratic exponential semimartingale as a limit of a sequence of canonical quadratic semimartingale plus a sequence of an increasing process. Then, from the stability theorem for forward

semimartingales given by Barlow and Protter [4], we prove the existence of the solution of a quadratic exponential BSDE associated with (g, ψ_T) for a coefficient g satisfying the structure condition $\mathcal{Q}_{exp}(l, a, \delta)$ and for non-bounded terminal condition ψ_T.
Finally, we have to mention that it is important to compare our approach with that used by Peng in [62, 64, 65] within the representation theorem of small g-expectation in terms of a BSDE's with coefficient g which admits a linear growth condition in z. Peng's approach is based on the notion of martingale associated with a nonlinear expectation, Monotonic limit theorem, a nonlinear Doob-Meyer's decomposition Theorem (see e.g. [63]). Moreover, Peng obtained the representation theorem for the nonlinear expectation which is dominated by a structure nonlinear expectation solution of BSDE's with coefficient given specially by $g_\mu(y, z) = \mu\big(|y| + |z|\big)$. Barrieu and El Karoui in [6] have extended this representation theorem for a dynamic convex risk measure in terms of quadratic BSDE's with convex coefficient g which depends only in z. Our approach is an extension of the Peng's results in the more naturel framework of quadratic exponential semimartingale.

The paper is structured as follows : in a second section, we present the model and preliminary notation. In the third section, we define the quadratic exponential semimartingale and we study the entropic quadratic exponential quasimartingale. In particular, we give the characterization of an entropic quasimartingale and its Doob decomposition. Then, we give the BMO properties and the stability results of quadratic exponential semimartingale. In the fourth section, we present applications of quadratic exponential semimartingale to solve the quadratic BSDE's associated to (g, ψ_T) for a coefficient g satisfying the structure condition $\mathcal{Q}_{exp}(l, a, \delta)$ and for non-bounded terminal condition ψ_T. In the fifth section, we solve a utility maximization problem of terminal wealth with exponential utility function in models involving defaultable assets. In Appendix, we give first results about BMO martingales and BMO semimartingales. Afterwards, we prove a universal bound for a quadratic exponential semimartingale with general structure condition which is crucial to get existence results of Theorem 3 for quadratic BSDE's.

Finally, we study the BSDE's with jumps in the Lipschitz and a linear growth coefficient case.

2.2 Model and Preliminary Notation

A filtered probability space $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ is given. All the processes are $\mathbb{G}$-adapted, and defined on the time interval $[0, T]$ where T is the finite horizon. We recall that any special $\mathbb{G}$-semimartingale Y admits a canonical decomposition $Y = Y_0 + A + M^{Y,c} + M^{Y,d}$ where A is a predictable finite variation process, $M^{Y,c}$ is a continuous martingale and $M^{Y,d}$ is a discontinuous martingale.

Assumption A 1. *In this paper, we make the following assumptions :*

1) The process $W = (W^1, \cdots, W^p)$ is a Brownian motion

2) For each $i = 1, \ldots, d$, H^i is a counting process and there exists a positive adapted process λ^i, called the $\mathbb{P}$ intensity of H^i, such that the process N^i with $N_t^i := H_t^i - \int_0^t \lambda_s^i ds$ is a martingale. We assume that the processes $H^i, i = 1, \ldots, d$ have no common jumps.

3) There exists a constant $K > 0$, such that $\sum_{i=1}^d \int_0^T \lambda_s^i ds \leq K$.

4) Any square integrable $\mathbb{G}$-martingale $M = (M_t)_{t \geq 0}$ admits a decomposition :

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s.dW_s + \int_0^t U_s.dN_s \qquad t \geq 0 \tag{2.4}$$

where $Z := (Z^1, \cdots, Z^p)$, $U := (U^1, \cdots, U^d)$ are $\mathbb{G}$-predictable processes which satisfy :

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T |Z_s|^2 ds\Big] < \infty, \quad \sum_{i=1}^d \mathbb{E}\Big[\int_0^T |U_s^i|^2 \lambda_s^i ds\Big] < \infty.$$

Note that, if M is a martingale, it admits the decomposition (2.4).

Example 1. *The Assumption A.1 is satisfied in the case where the filtration is generated by a Brownian motion W and an inhomogeneous Poisson process H.*

Example 2. *Assume that $\mathbb{G}$ is the filtration generated by a Brownian filtration $\mathbb{F}^B$ and the filtration associated with d default processes. More precisely, let $\tau_1, \cdots, \tau_d$ be positive* *random times and* $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ *where*

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon} \vee \sigma(\tau_1 \wedge t+\epsilon) \vee \sigma(\tau_2 \wedge t+\epsilon) \cdots \vee \sigma(\tau_d \wedge t+\epsilon)$$

We take $H^i_t = 1_{\{\tau_i \leq t\}}$ *the default process associated with the default time* τ_i. *We assume that, for any* $i = 1, \cdots, d$, *there exists a positive* $\mathbb{G}$-*adapted process* λ^i *such that the process* N^i *defined as* $N^i_t := H^i_t - \int_0^t \lambda^i_s ds$ *is a* $\mathbb{G}$-*martingale (in particular, each* τ_i *is* $\mathbb{G}$-*totally inaccessible). Note that the process* λ^i *is null after the default time* τ_i. *Then, under density hypothesis, (2.4) holds for the pair* W, N *where* W *is the martingale part of the* $\mathbb{G}$-*semimartingale* B *(see [15]).*

In the case the filtration is generated by a continuous filtration and the default times (see Example 2), for a given $\mathbb{G}$-martingale $M = M^c + M^d$ where $M^d = \int_0^\cdot \ell_s dN_s$ for some predictable process ℓ, the stochastic exponential martingale of M, denoted by $\mathcal{E}(M)$, is the discontinuous local martingale defined by :

$$\mathcal{E}_t(M) = \exp(M^c_t - \frac{1}{2}\langle M^c\rangle_t) \prod_{i=1}^{d} (1+\ell^i_{\tau^i})^{H^i_t} \exp\left(\int_0^t \ell^i_s \lambda^i_s ds\right)$$

In order that $\mathcal{E}(M)$ is strictly positive, we assume that the process ℓ satisfies $\ell^i > -1$ for $i = 1, \cdots, d$. In that case, we introduce the $\mathbb{G}$-predictable process $U = (U^1, \cdots, U^d)$ such that $\ell^i = e^{U^i} - 1$. The process $\mathcal{E}(M)$ is in general only a local martingale. One can define the stochastic logarithm of a strictly positive martingale L, as the process M such that $L = \mathcal{E}(M)$. In that case, the jumps of M are greater than -1.
Let us recall some notation :

Definition 6.

$L^{\exp}$ *is the space of all* $\mathcal{G}_T$-*measurable random variables* X *with* $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\exp(\gamma|X|)] < \infty$, *for all* $\gamma > 0$

$L^1_{\exp}$ *is the space of all* $\mathcal{G}_T$-*measurable random variables* X *with* $\exp(X) \in L^1(\Omega)$

$\mathcal{H}^2_\lambda$ *is the space of all* $\mathbb{R}^d$-*valued predictable processes* X *such that* $\sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}\Big[\int_0^T (X^i_s)^2 \lambda^i_s ds\Big] < \infty$

$\mathcal{H}^2$ *is the space of all* $\mathbb{R}^d$*-valued progressively processes* Z *such that* $\mathbb{E}\Big[\int_0^T |Z_s|^2 ds\Big] < \infty$

$\mathcal{S}^2$ *is the space* $\mathbb{G}$*-adapted processes* Y *such that* $\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2\Big] < \infty$

$D_0^{\exp}$ *is the space* $\mathbb{G}$*-adapted processes* Y *such that* $\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma \operatorname{ess\,sup}_{0\le t\le T}|Y_t|\right)\right] < \infty$, *for all* $\gamma > 0$

We consider a Backward Differential Equations with jumps of the form

$$Y_t = \psi_T + \int_t^T g_s(Y_s, Z_s, U_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s - \sum_{i=1}^d \int_t^T U_s^i dN_s^i. \tag{2.5}$$

A solution of the BSDE (2.5) associated with (g, ψ_T), where g is the coefficient and ψ_T is the terminal condition, is a triple of processes $(Y_t, Z_t, U_t)_{0\le t\le T} \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2_\lambda$.

2.3 Quadratic exponential semimartingales

We consider the BSDE (2.5) with jumps. From now on, we shall simply write BSDE, since in all the paper, BSDE involves jumps. We reduce our attention to a specific class of BSDEs, that we term exponential quadratic BSDE.

Definition 7. *An exponential quadratic BSDE has a coefficient* g *which satisfies the following quadratic-exponential structure condition* $\mathcal{Q}_{exp}(l, a, \delta)$ *: there exist two constants* $a \ge 0$ $\delta > 0$, *and an adapted process* $(l_t)_{t\ge 0}$ *such that :*

$$-|l_t| - a|y| - \frac{1}{2}\delta|z|^2 - \frac{1}{\delta}j_t(-\delta u) \le g_t(y, z, u) \le |l_t| + a|y| + \frac{1}{2}\delta|z|^2 + \frac{1}{\delta}j_t(\delta u), \ a.s.$$

where $j_t(u) = \sum_{i=1}^d (e^{u^i} - u^i - 1)\lambda_t^i$. *In what follows, if there is no ambiguity, we shall simply denote by* $j(u)$ *the (positive) quantity* $j_t(u)$. *In all the paper, we shall assume that* $\mathbb{P}$*- a.s. for any* $t \in [0, T]$, *the function* $(y, z, u) \longmapsto g_t(y, z, u)$ *is continuous.*

It is important to note that we deal with a quadratic growth in z and an exponential growth in u (this is why we have added an index *exp* in the notation $\mathcal{Q}$). The simplest generator of a quadratic exponential BSDE, called the **canonical generator** is defined as :

$$g_t(y,z,u) := q_\delta(z,u) := \frac{\delta}{2}|z|^2 + \frac{1}{\delta}j(\delta u)$$

.

Our goal is to prove the existence of a maximal solution of the quadratic exponential BSDE using the tools introduced in the recent work of [5].

Definition 8. *(Quadratic-exponential semimartingale) Let X be a semi-martingale $X = X_0 + M + V$, where $dM = dM^c + dM^d = ZdW + UdN$. The process X is said to be a quadratic-exponential semimartingale if the triple (V, Z, U) satisfies the structure condition $\mathcal{Q}_{exp}(\Lambda, A, \delta)$: there exist a $\mathcal{G}_T$-measurable increasing predictable processes Λ and A and a positive constant δ such that*

$$dV_t \ll d\Lambda_t+|X_t|dA_t+\frac{\delta}{2}d\langle M^c\rangle_t+\frac{1}{\delta}j(-\delta U_t)dt, \quad -d\Lambda_t-|X_t|dA_t-\frac{\delta}{2}d\langle M^c\rangle_t-\frac{1}{\delta}j(\delta U_t)dt \ll dV_t.$$

Therefore

$$d|V|_t \ll d\Lambda_t + |X_t|dA_t + \frac{\delta}{2}d\langle M^c\rangle_t + \frac{1}{\delta}(j(\delta U_t) + j(-\delta U_t))dt.$$

where $|V|$ denotes the total variation process of V, and the symbol $\ll$ stands for the absolute continuity of the increasing processes.
In the particular case $X = X_0 + M - \frac{\delta}{2}\langle M^c\rangle - \int_0^\cdot \frac{1}{\delta}j(\delta U_t)dt$, the semimartingale X is called canonical quadratic-exponential semimartingale or q_{exp}-semimartingale, and is denoted $X = \mathcal{R}(X_0, M^c, U)$.

The condition $\mathcal{Q}_{exp}(\Lambda, A, \delta)$ has in fact the form

$$d|V|_t \ll d\Lambda_t + |X_t|dA_t + \frac{\delta}{2}|Z_t|^2dt + \frac{1}{\delta}(j(\delta U_t) + j(-\delta U_t))dt.$$

We introduce now a generic class of quadratic BSDE's which will play an important role in the sequel :

Definition 9. *(Canonical quadratic-exponential BSDE) A canonical quadratic-exponential BSDE is a BSDE associated with the canonical generator q_δ and with terminal condition ψ_T :*

$$-dY_t = (\frac{\delta}{2}|Z_t|^2 + \frac{1}{\delta}j(\delta U_t))dt - Z_tdW_t - U_tdN_t, \qquad Y_T = \psi_T.$$

Since for any $\theta \neq 0$, $j(\delta U) = j(\frac{\delta}{\theta}\theta U)$, if a triple (Y, Z, U) is the solution of the BSDE (q_δ, ψ_T), then $(\theta Y, \theta Z, \theta U)$ is la solution of the BSDE $(q_{\frac{\delta}{\theta}}, \theta\psi_T)$. Hence, without loss of generality, we will assume $\delta = 1$ and we note $q_1 = q$.

We will need also the following definition :

Definition 10. *(Entropic process) The associated entropic process associated with a $\mathcal{G}_T$-measurable random variable ψ_T such that $\mathbb{E}[\exp(\delta\psi_T)] < \infty$ is given by :*

$$\rho_{\delta,t}(\psi_T) = \frac{1}{\delta} \ln \mathbb{E}[\exp(\delta\psi_T)|\mathcal{G}_t]. \tag{2.6}$$

This process $\rho_{\delta,.}(\psi_T)$ is a dynamic entropic risk measure, see Barrieu and El Karoui [6]. Like any dynamic risk measure, it enjoys in particular the following properties : for any $\delta > 0$:

- $\delta\rho_{\delta,.}(\psi_T) = \rho_1(\delta\psi_T)$.
- $\rho_{-\delta,.}(\psi_T) = -\rho_{\delta,.}(-\psi_T)$.
- For any stopping times σ and τ such that $\sigma \leq \tau \leq T$, $\rho_{\delta,\sigma}(\psi_T) = \rho_{\delta,\sigma}(\rho_{\delta,\tau}(\psi_T))$, $\quad \mathbb{P}-$a.s.
- For $\psi_\tau \in \mathcal{G}_\tau$, one has $\rho_{\delta,\tau}(\psi_T - \psi_\tau) = \rho_{\delta,\tau}(\psi_T) - \psi_\tau$

Definition 11. *We introduce the class $\mathcal{U}_{exp}$ of $\mathbb{G}$-martingales M such that the stochastic exponential $\mathcal{E}(M)$ is a uniformly integrable martingale.*

We will specify later conditions under which M belongs to $\mathcal{U}_{exp}$. Note that the l(standard) logarithm of $\mathcal{E}(M)$ is the q_{exp}-semimartingale $X = \mathcal{R}(0, M^c, U) = M - \frac{1}{2}\langle M^c\rangle - \int_0^. j(U_s)ds$.

Proposition 3. *Let ψ_T be a $\mathcal{G}_T$-measurable random variable such that $\mathbb{E}[\exp(\psi_T)] < \infty$, and let $\big(\rho_{1,t}(\psi_T)\big)_{t\in[0,T]}$ be the associated entropic process. Then :*

i)The entropic process is a solution of the canonical quadratic-exponential BSDE (q, ψ_T) : more precisely, there exists a pair $(Z^\rho, U^\rho) \in \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2_\lambda$ such that :

$$-d\rho_{1,t}(\psi_T) = (\frac{1}{2}|Z^\rho_t|^2 + j(U^\rho_t))dt - Z^\rho_t dW_t - U^\rho_t dN_t, \qquad \rho_{1,T}(\psi_T) = \psi_T$$

Moreover, the martingale $\mathcal{E}(Z^\rho.W + (e^{U^\rho} - 1).N)$ is uniformly integrable.

ii) The entropic process is the unique solution of the canonical quadratic-exponential BSDE (q, ψ_T) *in the class of the process* (Y, Z, U) *such that* $Z^\rho.W + (e^{U^\rho} - 1).N$ *belongs to* $\mathcal{U}_{exp}$ *and the minimal solution in the class of all the solutions.*

Proof : i) We remark first that the (standard) exponential L^ρ of the entropic process, given by

$$L_t^\rho := \exp(\rho_{1,t}(\psi_T)) = \mathbb{E}\big[\exp(\psi_T)|\mathcal{G}_t\big]$$

is a positive uniformly martingale thanks to the assumption $\mathbb{E}\big[\exp(\psi_T)\big] < \infty$. Hence, there exists a local martingale M^ρ (the stochastic logarithm of L^ρ) such that $\exp(\rho_.(\psi_T)) = \mathcal{E}(M^\rho)$ where $M^\rho = M^c + M^d$ and $\Delta M^d > -1$. From the Assumption A.1, there exist two $\mathbb{G}$-predictable processes (Z^ρ, U^ρ) such that $M^\rho = Z^\rho.W + (e^{U^\rho} - 1).N$. Using Itô's calculus, we have

$$-d \ln L_t^\rho = -d\rho_{1,t}(\psi_T) = (\frac{1}{2}|Z_t^\rho|^2 + j(U_t^\rho))dt - Z_t^\rho dW_t - U_t^\rho dN_t.$$

Therefore, $(\rho_.(\psi_T), Z^\rho, U^\rho)$ is a solution of the BSDE (q, ψ_T) and $Z^\rho.W + (e^{U^\rho} - 1).N \in \mathcal{U}_{exp}$.

ii) Let (Y, Z, U) be a solution of the canonical quadratic-exponential BSDE. Then, using Itô's formula, we get :

$$de^{Y_t} = e^{Y_{t-}}[Z_t dW_t + (e^{U_t} - 1)dN_t].$$

It follows that the process $e^{(Y_t - Y_0)} = \mathcal{E}_t(Z.dW + (e^U - 1)dN)$ is a positive local martingale, hence a supermartingale, and $\mathbb{E}[\exp(\psi_T)|\mathcal{G}_t] \leq \exp(Y_t)$ which means that $\rho_{1,t}(\psi_T) \leq Y_t$. □

2.3.1 Quasi-entropic martingales

We denote by $\mathcal{D}$ the set of processes which belong to class $[D]$ (see Dellacherie and Meyer [19]) and we introduce the class of processes

$$\mathcal{D}_{\exp} = \{X \text{ optional process} \quad \big| \quad \exp(X) \in \mathcal{D}\}$$

Definition 12. *An optional process X in class $\mathcal{D}_{\exp}$ is called :*

i) ***Entropic submartingale*** *if for any stopping times $0 \leq \sigma \leq \tau \leq T$:*

$$\rho_{1,\sigma}(X_\tau) \geq X_\tau, \qquad \mathbb{P} - as.$$

ii) ***Entropic supermartingale*** *if $-X$ is an entropic submartingale, i.e., for any stopping times $0 \leq \sigma \leq \tau \leq T$:*

$$\rho_{1,\sigma}(-X_\tau) \geq -X_\tau \quad (\textit{which is equivalent to} \quad \rho_{-1,\sigma}(X_\tau) \leq X_\tau, \quad \mathbb{P} - a.s.)$$

iii) ***Quasi entropic martingale*** *if it is an entropic submartingale and an entropic supermartingale.*

We have first the following result :

Proposition 4. *Let X be a semimartingale in $\mathcal{D}_{\exp}$ with the decomposition $X = X_0 + V + M$, with $M = M^c + \int_0^\cdot U_t dN_t$ such that $V + \frac{1}{2}\langle M^c \rangle + \int_0^\cdot j(U_t)dt = A$ is an increasing process. Then X is a canonical entropic submartingale.*

Proof : Consider the semimartingale $X = V + M = V + M^c + \int_0^\cdot U_t.dN_t$. Then,

$$\exp(X_t - V_t - \frac{\langle M^c \rangle_t}{2} - \int_0^t j(U_s)ds) = \mathcal{E}_t(M^c + (e^U - 1).N),$$

which implies that for any stopping times σ, τ, $0 \leq \sigma \leq \tau \leq T$:

$$e^{X_\tau} = e^{X_\sigma} \exp[V_\sigma^\tau + \frac{1}{2}\langle M^c \rangle_\sigma^\tau + \int_\sigma^\tau j(U_t)dt)]\mathcal{E}_\sigma^\tau(M^c + (e^U - 1).N) \geq e^{X_\sigma}\mathcal{E}_\sigma^\tau(M^c + (e^U - 1).N) \tag{2.7}$$

where $V_s^t = V_t - V_s$, $\langle M^c \rangle_s^t = \langle M^c \rangle_t - \langle M^c \rangle_s$ and $\mathcal{E}_s^t = \mathcal{E}_t / \mathcal{E}_s$. In order to obtain the previous inequality, we have used the fact that the process $A = V + \frac{1}{2}\langle M^c \rangle + \int_0^\cdot j(U_t)dt$ is increasing. The last inequality and the assumption $X \in \mathcal{D}_{\exp}$ imply the uniformly integrability of the martingale $\mathcal{E}_\cdot(M^c(e^U - 1).N)$ and we conclude that $\rho_{1,\sigma}(X_\tau) \geq X_\sigma$ by taking the conditional expectation in (2.7). □

Remark 1. *Note that a semimartingale X belongs to the class $\mathcal{D}_{\exp}$ if and only if $\exp(X_T) \in L^1$ and $X_\cdot \leq \rho_\cdot(X_T)$. Indeed, inequality (2.7) is valid under the assumption $X_\cdot \leq \rho_\cdot(X_T)$. One has also that a semimartingale X belongs to the class $\mathcal{D}_{\exp}$ if and only if $\exp(X_T) \in L^1$ and $M^c + (e^U - 1).N \in \mathcal{U}_{\exp}$.*

Obviously, we have the following result :

Corollary 1. *Let X be a semimartingale with the decomposition $X = V + M$ such that $V + \frac{1}{2}\langle M^c\rangle + \int_0^\cdot j(U_t)dt$ and $-V + \frac{1}{2}\langle M^c\rangle + \int_0^\cdot j(-U_t)dt$ are increasing processes and assume that X_T and $-X_T$ belong to $L^1_{\exp}$. Then X is a quasi-entropic martingale, i.e., for any stopping times $0 \leq \sigma \leq \tau \leq T$:*

$$\rho_{-1,\sigma}(X_\tau) \leq X_\sigma \leq \rho_{1,\sigma}(X_\tau), \qquad \mathbb{P}\text{-}as.$$

We are now interested with the converse result for the class of entropic submartingales in terms of Doob-Meyer decomposition.

Proposition 5. *Let X be an adapted càdlàg entropic submartingale of class $\mathcal{D}_{\exp}$. Then, X admits an additive decomposition :*

$$X = M - \frac{1}{2}\langle M^c\rangle - \int_0^\cdot j(U_t)dt + A.$$

where the process A is predictable and increasing.

Proof : If X is an entropic submartingale X, then $\exp(X)$ is a positive submartingale which admits a multiplicative decomposition of the form

$$\exp(X_t) = \mathcal{E}_t(M)B_t \tag{2.8}$$

where $\mathcal{E}_t(M)$ is a positive martingale (and M a local martingale), and B a predictable increasing process (see Yoeurp and Meyer [75]). By the martingale representation of M, one can write : $M = M^c + \int_0^\cdot l_t.dN_t$ and, from the positivity of the stochastic exponential, there exists, for all $i = 1 \cdots d$, a predictable process U^i such that $l^i = e^{U^i} - 1$. Taking the logarithm in (2.8), we get the decomposition

$$X_t = M_t - \frac{1}{2}\langle M^c\rangle_t - \int_0^t j(U_s)ds + \ln B_t.$$

It remains to set $A := \ln B$. $\square$

2.3.2 Quadratic exponential semimartingale and BMO properties

In this part, we prove that a $q_{\exp}$ semimartingale with BMO martingale part is a BMO semimartingale. All results related to BMO-Martingales and BMO-semimartingales are given in the Appendix. We have the following result :

Proposition 6. *Let $X = X_0 + M + V$ be a $q_{\exp}$-semimartingale, with a BMO martingale part. Then, X is BMO-semimartingale.*

Proof : Let X be a $q_{\exp}$ semimartingale, then X and $-X$ are entropic submartingales, therefore, from the Assumption 1 and Proposition 5 , there exist martingales $M = M^c + \int U_s.dN_s$ and $\bar{M} = \bar{M}^c + \int \bar{U}_s.dN_s$ and predictable increasing processes A and $\bar{A}$ such that :

$$X_t = X_0 + M^c_t + \int_0^t U_s.dN_s - \frac{1}{2}\langle M^c\rangle_t - \int_0^t j(U_s)ds + A_t$$
$$-X_t = -X_0 + \bar{M}^c_t - \int_0^t \bar{U}_s.dN_s - \frac{1}{2}\langle \bar{M}^c\rangle_t + \int_0^t j(\bar{U}_s)ds + \bar{A}_t\,.$$

From the uniqueness of the representation, $\bar{M}^c = -M^c$ and $\bar{U} = -U$, then :

$$A_t + \bar{A}_t = \langle M^c\rangle_t + \int_0^t (j(U_s) + j(-U_s))ds$$

and it follows that there exists a process $(\alpha_t)_{t\geq 0}$, $0 \leq \alpha_t \leq 1$ such that :

$$dA_t = \alpha_t d\langle M^c\rangle_t + \alpha_t(j(U_t) + j(-U_t))dt, \qquad d\bar{A}_t = (1-\alpha_t)d\langle M^c\rangle_t + (1-\alpha_t)(j(U_t) + j(-U_t))dt \tag{2.9}$$

hence :

$$dX_t = dM_t + (\alpha_t - \frac{1}{2})d\langle M^c\rangle_t + (\alpha_t - 1)j(U_t)dt + \alpha_t\, j(-U_t)dt$$

Assume that the martingale M is BMO with $||M||_{BMO} = c_M$, then for any stopping times $\sigma \leq \tau$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\max|X|_\sigma^\tau|\mathcal{G}_\sigma\right] &\leq \mathbb{E}\left[\max|M|_\sigma^\tau|\mathcal{G}_\sigma\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\langle M^c\rangle_\sigma^\tau|\mathcal{G}_\sigma\right] + \mathbb{E}\left|\int_\sigma^\tau (j(U_s) + j(-U_s))\,ds|\mathcal{G}_\sigma\right] \\ &\leq 2c_M + \frac{1}{2}c_M^2 + C\end{aligned}$$

Note that the existence of a constant $C = C(c_M)$ comes from the fact that the process U is bounded (see lemma 3) and that the process $\int_0^\cdot \lambda^i_s ds$ is bounded for every $i = 1, \cdots, d$.

Remark 2. *The reverse doesn't hold : if X is a $q_{\exp}$ BM0-semimartingale, then we can't prove that its martingale part is a BMO-martingale. But later on, we will prove that if X is bounded, this condition is satisfied.*

2.3.3 Stability results of quadratic exponential semimartingale

Here, we present stability results for quadratic exponential semimartingales which we shall use for the construction of the maximal solution of a class of quadratic BSDE's. We first recall a general stability theorem of Barlow and Protter [4] for a sequence of càdlàg special semimartingales converging uniformly in L^1. We denote by $X^* := \sup_{0\le t\le T}|X_t|$.

Theorem 1. *Let X^n be a sequence of semimartingales which belong to $\mathcal{H}^1$ with canonical decomposition $X^n = X_0^n + M^n + V^n$, and satisfy :*

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T |dV_s^n|\Big] \le C, \quad \textit{and} \quad \mathbb{E}\left[\left(M^n\right)^*\right] \le C \tag{2.10}$$

for some positive constant C. Assume that :

$$\mathbb{E}\left[\left(X^n - X\right)^*\right] \longrightarrow 0, \quad \textit{as} \quad n\to\infty,$$

where X is an adapted process. Then X is a semimartingale in $\mathcal{H}^1$ with canonical decomposition $X = X_0 + M + V$ satisfying :

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T |dV_s|\Big] \le C, \quad \textit{and} \quad \mathbb{E}\left[\left(M\right)^*\right] \le C \tag{2.11}$$

and we have

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(V^n - V\right)^*\right] = 0 \quad \textit{and} \quad \lim_{n\to\infty}\|M^n - M\|_{\mathcal{H}^1} = 0. \tag{2.12}$$

Strong convergence for bounded quadratic-exponential semimartingale

In this part, we shall use the same arguments as in [5], in order to prove the strong convergence of martingale part of a sequence X^n of bounded $q_{\exp}$-semimartingales. The strong stability theorem will play an important role in the proof for the existence result for a class of quadratic BDSE with jump without using tools of Kobylanski.

Proposition 7. *Let $X^n = X_0^n + M^n + V^n$ be a sequence of uniformly bounded $q_{\exp}$-semimartingales, and assume that the sequence M^n belongs to the BMO-space(there exists a constant c_M which does'nt depend on n such that $\mathbb{E}[\sup_n [M^n]_{\sigma^-}^{\tau} |\mathcal{G}_\sigma] \leq c_M$ for all stopping times $\sigma \leq \tau$). If X^n is a Cauchy sequence, then M^n is a Cauchy sequence with respect to the BMO-norm.*

Proof : Consider a sequence of $q_{\exp}$-bounded semimartingales $X^n = X_0^n + M^n + V^n$ such that $\lim_{n,p} |X^{n+p} - X^p| = 0$. Since the sequence X^n is uniformly bounded, it follows that U^n is uniformly bounded. Moreover, using the BMO properties of M^n, we deduce that $|V^n| \leq \frac{1}{2}\langle M^{c,n}\rangle + \int (j(U_s^n) + j(-U_s^n))ds$ is uniformly bounded.

For any $i, j,$ we set $X^{i,j} = X^i - X^j$, $X_{t,s}^{i,j} = X_s^i - X_t^i - (X_s^j - X_t^j)$ and $M^{i,j} = M^i - M^j$. Then, we apply Itô's formula to get :

$$[M^{i,j}]_{t,T} = |X_T^{i,j} - X_t^{i,j}|^2 - 2\int_t^T X_{t,s}^{i,j} dX_s^{i,j}.$$

Using the same arguments as in [5], there exists a positive constant C such that :

$$\mathbb{E}\left([M^{i,j}]_{t,T}\right) \leq C\mathbb{E}\left|\max |X_{t,T}^{i,j}[|\mathcal{G}_t\right] + \mathbb{E}\left(|X_{t,T}^{i,j}|^2 |\mathcal{G}_t\right).$$

□

We give a stability result for uniformly dominated sequence of quadratic-exponential semimartingales satisfying the structure condition :

Theorem 2. *Let Y^n be a sequence of quadratic semimartingales $Y^n = V^n + M^{n,c} + \int U^n dN$ satisfying a uniform canonical structure condition $\mathcal{Q}_{exp}(0,0,\delta)$:*

$$d|V^n|_t \ll \frac{\delta}{2} d\langle M^{n,c}\rangle_t + \frac{1}{\delta}(j(\delta U_t^n) + j(-\delta U_t^n))dt.$$

Assume that the terminal condition $Y_T^n = \psi_T$ is such that $\exp(\delta\psi_T)$ and $\exp(-\delta\psi_T)$ belong to L^1 and that the sequence Y^n is uniformly bounded by the entropic processes $\rho_t(-\delta, \psi_T)$ and $\rho_t(\delta, \psi_T)$ respectively :

$$\rho_t(-\delta, \psi_T) \leq Y_t^n \leq \rho_t(\delta, \psi_T), \ a.s. \tag{2.13}$$

If the sequence Y^n converges a.s. uniformly to a càdlàg process Y, then Y is a càdlàg quadratic-exponential semimartingale with the same canonical structure condition $\mathcal{Q}_{exp}(0,0,\delta)$.

Proof : This result is a consequence of the stability theorem (Theorem 1). □

2.4 Application of $q_{\exp}$-semimartingale to BSDE

In this part, we consider the BSDE associated with (g, ψ_T) such that the terminal condition ψ_T is bounded and the coefficient g satisfies the condition $\mathcal{Q}_{\exp}(l, a, \delta)$. By applying the $q_{\exp}$-semimartingale results, we prove that the solution (Y, Z, U) belongs to $\mathcal{S}^\infty \times BMO \times \mathcal{S}^\infty$, $Z \in \mathrm{BMO}$ means the provess $Z.W$ is a BMO martingale.

Proposition 8. *Assume that the coefficient g satisfies the condition $\mathcal{Q}_{\exp}(l, a, \delta)$, the terminal condition ψ_T is bounded and that $\mathbb{E}\left[\int_\sigma^T |l_s| ds | \mathcal{G}_\sigma\right] \leq C$, for all $\mathbb{G}$-stopping time σ and $C > \frac{1}{\delta}$. Let (Y, Z, U) be the solution of the quadratic-exponential BSDE associated with (g, ψ_T). Then the following assertions are equivalent :*

a) $Y_T^* := \sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| \in \mathrm{L}^\infty$

b) $M = \delta Z.W + (e^{\delta U} - 1).N$ and $\bar{M} = -\delta Z.W + (e^{-\delta U} - 1).N$ are BMO-martingales and for any $i = 1, \cdots, d$, $U_T^{i,*} := \sup_{0\leq t\leq T} |U_t^i| \in \mathrm{L}^\infty$.

Proof : Let assume first that the assertion b) holds. Let $X_t = \delta Y_t + \int_0^t \delta g_s ds - \int_0^t (\frac{\delta^2}{2}|Z_s|^2 + j(\delta U_s))ds$, then :

$$de^{X_t} = e^{X_t}(\delta Z_t dW_t + (e^{\delta U_t} - 1).dN_t)$$

It follows that $\exp(X_t) = \mathcal{E}(\delta Z.W + (e^{\delta U} - 1).N)_t$, therefore, using the fact that the martingale $M = \delta Z.W + (e^{\delta U} - 1).N$ is a BMO martingale and that $(e^{\delta U_t^i} - 1) > -1 + e^{-|\delta| U_T^{i,*}}$ for any $i = 1, \cdots, d$ we deduce using Kazamaki criteria that the martingale M is uniformly integrable. Hence, for any stopping time σ, we get : $\mathbb{E}\left[\exp(X_T - X_\sigma) | \mathcal{G}_\sigma\right] = 1$, which implies that

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\delta\psi_T-\delta Y_\sigma+\int_\sigma^T(\delta(g_t-\frac{\delta}{2}|Z_t|^2)-j(\delta U_t))dt\right)\Big|\mathcal{G}_\sigma\right]=1.$$

Since the coefficient of the BSDE satisfies $\mathcal{Q}_{\exp}(l,a,\delta)$, we get :

$$\exp(\delta Y_\sigma)\le\mathbb{E}\Big[\exp\left(\delta\psi_T+\int_\sigma^T|l_t|dt\right)\Big|\mathcal{G}_\sigma\Big]$$

$\mathbb{E}\left[\int_\sigma^T[l_s|ds|\mathcal{G}_t\right]\le c$, for a positive constant c. Therefore, since the terminal condition of the BSDE ψ_T is bounded, we get that there exists a constant C_1 such that $Y\le C_1$. We use the same arguments to prove that there exists a constant C_2 such that $-Y\le C_2$, by considering the process

$$\bar{X}_t=-\delta Y_t-\int_0^t\delta g_s ds+\int_0^t(\frac{\delta^2}{2}|Z_s|^2+j(-\delta U_s))ds$$

and the hypothesis that the martingale $\bar{M}$ is uniformly integrable.

Conversely, assume that the assertion a) holds. Using the form of the BSDE, we get that $|U^i_{\tau_i}|\le 2Y^*_T$, for any $i=1,\cdots,d$. Then, by using Lemma 3 in the appendix, we deduce that there exists $C>0$ such that for any $t\in[0,T]$ and $|U^i_t|\le C$, for any $i=1,\cdots,d$. Finally, it remains to prove that the martingales M and $\bar{M}$ are BMO-martingales. Let $\alpha\in\mathbb{R}$, by applying Itô's calculus, we obtain :

$$de^{\alpha Y_t}=e^{\alpha Y_{t-}}\left[(-\alpha g_t+e^{\alpha U_t}-\alpha U_t-1).\lambda_t+\frac{\alpha^2}{2}|Z_t|^2)dt+\alpha Z_t.dW_t+(e^{\alpha U_t}-1).dN_t\right] \tag{2.14}$$

then we can use the properties of the coefficient :

$$\begin{aligned} d\exp(\alpha Y_t)&=\exp(\alpha Y_{t-})\left[-\alpha(g_t-\frac{\delta}{2}|Z_t|^2-\frac{1}{\delta}j(\delta U_t)-l_t)dt+\alpha Z_t.dW_t+(\exp(\alpha U_t)-1).dN_t\right]\\ &\quad+\exp(\alpha Y_t)\left[\frac{\alpha(\alpha-\delta)}{2}|Z_t|^2+\left(\exp(\alpha U_t)-\frac{\alpha}{\delta}\exp(\delta U_t)+(\frac{\alpha}{\delta}-1)\right).\lambda_t-\alpha l_t\right]dt.\end{aligned}$$

Moreover, taking $\alpha=2\delta$ and the conditional expectation in the last equation, we get :

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{2\delta Y_s}\delta^2|Z_s|^2ds+\int_t^T e^{2\delta Y_s}(e^{\delta U_s}-1)^2.\lambda_s ds\Big|\mathcal{G}_t\right]\le\mathbb{E}\left[e^{2\delta\psi_T}-e^{2\delta Y_t}+2\delta\int_t^T|l_s|ds\Big|\mathcal{G}_t\right] \tag{2.15}$$

Since the process Y is bounded, and $\mathbb{E}\left[\int_t^T |l_s|ds|\mathcal{G}_t\right] \leq C$, there exists a constant $C_1 > 0$ such that :

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \delta^2|Z_s|^2 ds + \int_t^T \left(e^{\delta U_s} - 1\right)^2 .\lambda_s ds \Big| \mathcal{G}_t\right] \leq C_1$$

which proves that the martingale $M = \delta Z.W + (e^{\delta U} - 1).N$ is a BMO-martingale.

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \delta^2|Z_s|^2 ds + \int_t^T \left(e^{\delta U_s} - 1\right)^2 .\lambda_s ds \Big| \mathcal{G}_t\right] \leq C_1$$

Let us prove that $\bar{M}$ is BMO-martingale. Using (2.14), we get :

$$\begin{aligned} d\exp(\alpha Y_t) &= \exp(\alpha Y_t)\left[-\alpha(g_t + \frac{\delta}{2}|Z_t|^2 + \frac{1}{\delta}j(-\delta U_t) + l_t)dt + \alpha Z_t dW_t + (\exp(\alpha U_t) - 1).dN_t\right] \\ &+ \exp(\alpha Y_t)\left[\frac{\alpha(\alpha+\delta)}{2}|Z_t|^2 + \left(\exp(\alpha U_t) + \frac{\alpha}{\delta}\exp(-\delta U_t) + (\frac{-\alpha}{\delta} - 1)\right).\lambda_t + \alpha l_t\right] dt. \end{aligned}$$

By taking $\alpha = -2\delta$ and the conditional expectation in the above equation, we get :

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{-2\delta Y_s}\delta^2|Z_s|^2 ds + \int_t^T e^{-2\delta Y_s}\left(e^{-\delta U_s} - 1\right)^2 .\lambda_s ds \Big| \mathcal{G}_t\right] \leq \mathbb{E}\left[-e^{-2\delta Y_t} + e^{-2\delta \psi_T} + 2\delta \int_t^T |l_s| ds \Big| \mathcal{G}_t\right]. \tag{2.16}$$

Moreover, since the process Y is bounded and $\mathbb{E}\left[\int_t^T |l_s|ds|\mathcal{G}_t\right] \leq C$, there exists a constant $C_2 > 0$ such that :

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \delta^2|Z_s|^2 ds + \int_t^T \left(e^{-\delta U_s} - 1\right)^2 .\lambda_s ds \Big| \mathcal{G}_t\right] \leq C_2,$$

thus, $\bar{M} = -\delta Z.W + (e^{-\delta U} - 1).N$ is BMO-martingale. □

Remark 3. *Since for all $u \in \mathbb{R}$ and $|u| \leq |e^u - 1| + |e^{-u} - 1|$, the BMO properties of the martingale $-M^c + \int(e^{-U_s} - 1).dN_s$ and $M^c + \int(e^{U_s} - 1).dN_s$ assert that the martingale M is a BMO-martingale.*

2.4.1 Existence of the solution of a quadratic BSDE with jump

The existence is a consequence of the properties of quadratic exponential semimartingale. Assuming that the terminal condition is bounded, we construct an increasing sequence of quadratic exponential semimartingales which are uniformly bounded, and then by applying the stability result, we prove that the limit of this sequence is a quadratic exponential semimartingale. From now, we will add a further condition $(\mathcal{A}_\gamma)$ on the coefficient g :

$$g_t(y,z,u_1) - g_t(y,z,u_2) \leq \sum_{i=1}^{d} \gamma_t^i(u_1^i,u_2^i)(u_1^i - u_2^i)\lambda_t^i \qquad (\mathcal{A}_\gamma)$$

where the functions γ^i satisfy $-1+\delta^i \leq \gamma(u_1^i,u_2^i) \leq c^i$ for all $i=1,\dots,d$ and $u_1,u_2 \in \mathbb{R}^d$ with $\delta^i, c^i > 0$. We will use this condition mainly in order to insure comparison theorem for a class of quadratic-exponential BSDE's (see Appendix)

Theorem 3. *Assume that g satisfies the conditions $\mathcal{Q}_{exp}(l,a,\delta)$ such that the processes $l=(l_t)_{t\geq 0}$ and $a=(a_t)_{t\geq 0}$ are uniformly bounded. Assume also that ψ_T is bounded. Then, there exists a minimal solution $(Y,Z,U) \in \mathcal{S}^\infty \times \mathbb{BMO} \times \mathcal{S}^\infty$ which solves the quadratic exponential BDSE associated with (g,ψ_T).*

Proof :

Step 1 : We study first the case when g satisfies the conditions $\mathcal{Q}_{exp}(0,0,\delta)$. We construct a non-increasing sequence $(g^n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfying for each $n \in \mathbb{N}$ the conditions $\mathcal{Q}_{exp}(0,0,\delta)$ and which converges to the coefficient g a.s.The non-increasing sequence of quadratic semimartingales Y^n associated with (g^n,ψ_T) converges a.s. uniformly to a quadratic exponential semimartingale Y associated with (g,ψ_T). Therefore, by using the Doob decomposition (see Proposition 5) of the entropic quasi-martingale Y, there exists an increasing predictable process A with $A_0=0$ such that the finite variation V of $Y=Y_0+M^c+U.N+V$ can be decomposed as :

$$V_t = -\frac{\delta\langle M^c\rangle_t}{2} - \int_0^t \frac{1}{\delta} j(\delta U_s)ds + A_t, \quad t \leq T.$$

Thus, using the fact that $\langle M^c\rangle$ is absolutely continuous w.r.t. Lebesgue's measure, and relation (2.9), there exists an adapted positive process $(\theta_t)_{t\geq 0}$ such that, for all $t\in[0,T]$, we have :

$$A_t = \int_0^t \theta_s ds,\ a.s.. \tag{2.17}$$

Moreover, by using the decomposition of the finite variation V we get :

$$g(t,y,z) = \frac{\delta}{2}|z|^2 + \frac{1}{\delta}j(\delta u) - \theta_t$$

which satisfy the condition $\mathcal{Q}_{exp}(0,0,\delta)$ and the result follows. Now, let for each $n\in\mathbb{N}$, $(Y^n,Z^n,U^n)\in\mathcal{S}^\infty\times\mathbb{BMO}\times\mathcal{S}^\infty$ be the solution of the BSDE associated with (g^n,ψ_T) where g^n is given by :

$$g^n(t,z,u) = \frac{\delta}{2}|z|^2 + \frac{1}{\delta}j(\delta u) + \big(-\theta_t \vee -n\delta|z|\big). \tag{2.18}$$

We denote by $f^n(t,z,u) = -\theta_t \vee -n\delta|z|$. Since the process θ is positive, we have $|f^n(t,z,u)|\leq n\delta|z|$ and $|f^n(t,z,u)|\leq|\theta_t|$, for all $t\in[0,T]$ and $z\in\mathbb{R}^d$. Thus, f^n has a linear growth in z. For each n, g^n satisfies the condition $\mathcal{Q}_{\exp}(0,0,\delta)$. Obviously, the sequence g^n is non-increasing and converges to g a.s. By comparison Theorem 7, the sequence Y^n is non-increasing and a.s. uniformly bounded. Therefore, by the stability Theorem 2, Y^n converges a.s. uniformly to a process $Y\in\mathcal{S}^\infty$ which is a quadratic exponential semimartingale. Moreover the martingale part M of Y is a BMO-martingale by using the strong stability result given in Proposition 7.

Step 2 : Let us consider now the case when g satisfies the conditions $\mathcal{Q}_{exp}(l,a,\delta)$. We construct a sequence of g^n satisfying the structure condition $\mathcal{Q}_{\exp}(l,a,\delta)$ which converge to g a.s. Since the process $\{\exp[\delta(Y_t+\int_0^t|Y_s|a_sds+\int_0^t l_sds)]\}_{t\geq 0}$ is a positive submartingale, we deduce from Doob decomposition (Proposition 5), that there exists an increasing process Θ such that :

$$V_t = -\frac{\delta\langle M^c\rangle_t}{2} - \int_0^t \frac{1}{\delta}j(\delta U_s)ds - \int_0^t |Y_s|.a_sds - \int_0^t l_sds + \Theta.$$

Thus, using the fact that $\langle M^c\rangle$ is absolutely continuous w.r.t. Lebesgue's measure, and relation (2.9), there exists adapted positive process $(\theta_t)_{t\geq 0}$ such that, for all $t\in[0,T]$, we have :

$$\Theta_t = \int_0^t \theta_s ds,\ a.s.. \tag{2.19}$$

Moreover, by using the decomposition of the finite variation V we get :

$$g(t,y,z) = \frac{\delta}{2}|z|^2 + \frac{1}{\delta}j(\delta u) + l_t + a_t.|y| - \theta_t$$

which satisfy the condition $\mathcal{Q}_{exp}(\Lambda, A, \delta)$. Now, let define the sequence g^n :

$$g^n(t,z,u) = \frac{\delta}{2}|z|^2 + \frac{1}{\delta}j(\delta u) + l_t + a_t|y| + \big(-\theta_t \vee -n\delta|z|\big). \tag{2.20}$$

We denote by $f^n(t,y,z,u) = l_t + a_t|y| - \theta_t \vee -n\delta|z|$. Since the process θ is positive, we have $|f^n(t,z,u)| \leq l_t + a_t|y| + n\delta|z|$.For each $n \in \mathbb{N}$, g^n satisfies the condition structure $\mathcal{Q}_{\exp}(l,a,\delta)$, since the processes a and l are bounded, using Proposition 16, the quadratic-exponential semimartingale Y^n is bounded. Moereover, there exists a positive constant $C > 0$ such that :

$$|f^n(t,z,u)| \leq C \vee n\delta(1+|z|), \quad |f^n(t,z,u)| \leq C + \theta_t \quad a.s.$$

Thus f^n has linear growth in z, we conclude by similar arguments using in Step 1.

□

2.4.2 Uniqueness in a particular case

Assuming a stronger condition on the coefficient g of the quadratic BSDE, we obtain the uniqueness of the solution associated with (g, ψ_T) where $\psi_T \in \mathrm{L}^\infty$:

Proposition 9. *Assume that the coefficient g satisfies the conditions $\mathcal{Q}_{\exp}(l,a,\delta)$ and $(\mathcal{A}_\gamma)$ and that there exists a constant $C > 0$ such that $\forall z^1, z^2 \in \mathbb{R}^p$, and $u \in \mathbb{R}^d$:*

$$|g_t(z^1,u) - g_t(z^2,u)| \leq C\left(1 + |z^1| + |z^2|\right)|z^1 - z^2|, \quad t \leq T. \tag{2.21}$$

Then, there exists a unique solution $(Y,Z,U) \in \mathcal{S}^\infty \times \mathcal{H}^2 \times \mathcal{S}^\infty$ associated with (g,ψ_T) where $\psi_T \in \mathrm{L}^\infty$.

Proof : Let (Y^1, Z^1, U^1) and (Y^2, Z^2, U^2) be two solutions of the BSDE associated with (g, ψ_T). Setting $\Delta Y = Y^1 - Y^2$, $\Delta Z = Z^1 - Z^2$ and $\Delta U = U^1 - U^2$, we obtain :

$$\Delta Y_t = \int_t^T \left(g_s(Z_s^1, U_s^1) - g_s(Z_s^2, U_s^2)\right) ds - \int_t^T \Delta Z_s.dW_s - \int_t^T \Delta U_s.dN_s \tag{2.22}$$

$$= \int_t^T \left([g_s(Z_s^1, U_s^1) - g_s(Z_s^2, U_s^1)] + [g_s(Z_s^2, U_s^1) - g_s(Z_s^2, U_s^2)]\right) ds - \int_t^T \Delta Z_s.dW_s \tag{2.23}$$

$$- \int_t^T \Delta U_s.dN_s$$

Define the processes $\bar{Z}^{1,i} = (Z^{2,1}, \ldots, Z^{2,i-1}, Z^{1,i}, \ldots, Z^{1,p})$ and $\bar{Z}^{2,i} = (Z^{2,1}, \ldots, Z^{2,i}, Z^{1,i+1}, \ldots, Z^{1,p})$, $i = 1, \ldots, p$ and consider the following processes : for all $i = 1, \ldots, p, \quad t \leq T$

$$\beta_t^i(Z_t^1, Z_t^2) = \begin{cases} \dfrac{g_t(\bar{Z}_t^{1,i}, U_t^1) - g_t(\bar{Z}^{2,i}, U_t^1)}{Z_t^{1,i} - Z_t^{2,i}}, & \text{if} \quad Z_t^{1,i} \neq Z_t^{2,i}, \\ 0, & \text{if} \quad Z_t^{1,i} = Z_t^{2,i}. \end{cases}$$

Then we have :

$$g_t(Z_t^1, U_t^1) - g_t(Z_t^2, U_t^1) = \sum_{i=1}^p \beta_t^i(Z_t^1, Z_t^2)(Z_t^{1,i} - Z_t^{2,i})$$

with $|\beta_t(Z_t^1, Z_t^2)| \leq C\left(1 + |Z_t^1| + |Z_t^2|\right)$ for all $t \in [0, T]$. Moreover, since the coefficient g satisfies the condition $(\mathcal{A}_\gamma)$ and (2.21), we get :

$$\Delta Y_t \leq \mathbb{E}\left[\int_t^T \left(\sum_{i=1}^p \Delta Z_t^i (dW_t^i - \beta_t^i(Z_t^1, Z_t^2)dt) + \sum_{i=1}^d \int_t^T \Delta U_t^i (dN_t^i - \gamma_t^i(U_t^1, U_t^2)\lambda_t^i dt)\right) \Big| \mathcal{G}_t\right].$$

Define the probability measure $\mathbb{Q}$ with the Radon-Nikodym density $Z^{\mathbb{Q}}$ with respect to $\mathbb{P}$ given by :

$$\frac{dZ_t^{\mathbb{Q}}}{Z_{t^-}^{\mathbb{Q}}} = \beta_t(Z_t^1, Z_t^2).dW_t + \gamma_t(U_t^1, U_t^2).dN_t.$$

Then, since $-1 + \kappa \leq \gamma_t^i(U_t^1, U_t^2) \leq C$ and $|\beta_t(Z_t^1, Z_t^2)| \leq C\left(1 + [Z_t^1| + |Z_t^2|\right)$ for all $t \in [0, T]$, we have that $\beta.W + \gamma.N$ is BMO-martingale, hence $Z^{\mathbb{Q}}$ is uniformly integrable. Therefore, we have that $\Delta Y_t \leq \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{Q}}}[\Delta\psi|\mathcal{G}_t] \leq 0$, and then $Y_t^1 \leq Y_t^2$ a.s. We use the same arguments to prove $Y_t^2 \leq Y_t^1$ a.s. permutting the role of Y^1 and Y^2. □

2.4.3 Existence result : exponential integrable condition case

In this section, we want to relax the assumption of the boundness of the terminal condition, we will interest also to give more condition to obtain a uniqueness of such solution.
In this part, we will first introduce the natural space of the martingale part of the quadratic exponential BSDE associated with (g, ψ_T) where g satisfies $\mathcal{Q}_{\exp}(0,0,\delta)$ where $\psi_T \in \mathrm{L}^{\exp}$.

Proposition 10. *Let ψ_T belong to $\mathrm{L}^{\exp}$. Then the martingale part $M = Z.W + U.N$ of the quadratic exponential semimartingale belongs to L^2.*

Proof : Using inequalities (2.15) and (2.16), we deduce :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(2\delta Y_s)\delta^2 |Z_s|^2 ds\right] &\leq \mathbb{E}\left[-\exp(2\delta Y_0) + \exp(2\delta\psi_T)\right],\\
\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(-2\delta Y_s)\delta^2 |Z_s|^2 ds\right] &\leq \mathbb{E}\left[-\exp(-2\delta Y_0) + \exp(-2\delta\psi_T)\right].
\end{aligned}$$

Since for all $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) + \exp(-x) \geq 2$, we deduce that the continuous martingale part $Z.W$ of the semimartingale Y belongs to L^2. Indeed, we have :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s|^2 ds\right] \leq \frac{1}{2\delta^2}\mathbb{E}\left[-\exp(2\delta Y_0) - \exp(-2\delta Y_0) + \exp(-2\delta\psi_T) + \exp(2\delta\psi_T)\right] \quad (2.24)$$

Using the same arguments, we get also that the discontinuous martingale part $U.N$ of the semimartingale Y belongs to L^2, since the following inequalities hold :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T (e^{\delta U_s} - 1).\lambda_s ds\right] &= \sum_{i=1}^d \mathbb{E}\left[\int_0^T (e^{\delta U_s^i} - 1)\lambda_s^i e^{\frac{\delta Y_s}{2}} e^{\frac{-\delta Y_s}{2}} ds\right]\\
&\leq \sum_{i=1}^d \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T (e^{\delta U_s^i} - 1)^2 \lambda_s^i e^{\delta Y_s} ds\right)^{\frac12} \left(\int_0^T e^{-\delta Y_s}\lambda_s^i ds\right)^{\frac12}\right]\\
&\leq \sum_{i=1}^d \left[\mathbb{E}\left(\int_0^T (e^{\delta U_s^i} - 1)^2 \lambda_s^i e^{\delta Y_s} ds\right)\right]^{\frac12} \left[\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-\delta Y_s}\lambda_s^i ds\right)\right]^{\frac12}.
\end{aligned}$$

Using the inequality (2.15) and the assumption $\sum_{i=1}^d \int_0^T \lambda_s^i ds \leq K$, we get :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \big(\exp(\delta U_s) - 1\big).\lambda_s ds\right] \leq K^{\frac12} d\sqrt{\mathbb{E}\left[-\exp(2\delta Y_0) + \exp(2\delta\psi_T)\right]}\sqrt{\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\delta[Y_t|)}. \quad (2.25)$$

Using the same arguments and inequality (2.16) we get :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \big(\exp(-\delta U_s)-1\big).\lambda_s ds\right] \leq K^{\frac{1}{2}} d\sqrt{\mathbb{E}\left[-\exp(-2\delta Y_0)+\exp(-2\delta\psi_T)\right]}\sqrt{\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\delta[Y_t|)}. \tag{2.26}$$

Finally, using the algebrais inequality $x^2 \leq \exp(x)+\exp(-x)-2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, we conclude that there exists a constant $C>0$ such that :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |U_s|^2.\lambda_s ds\right] \leq C.$$

□

Theorem 4. *Let g be a coefficient satisfying the condition $\mathcal{Q}_{\exp}(0,0,\delta)$ with $|l_t| \leq C$. Assume also that the terminal condition $\psi_T \in \mathrm{L}^{\exp}$. Then there exists a solution $(Y,Z,U) \in \mathcal{D}_{\exp}\times\mathcal{H}^2\times\mathcal{H}^2_\lambda$ of the BSDE* (2.5) *associated with (g,ψ_T).*

Proof : We use the same arguments as in the proof of Theorem 3, so that we consider the same approximation sequence g^n of the coefficient g given by :

$$g^n_t = \frac{\delta}{2}|z|^2 + \frac{1}{\delta}j_t(\delta u) + (-\theta_t \vee -n\delta|z|), \quad t\in[0,T], z\in\mathbb{R}^p, u\in\mathbb{R}^d.$$

with $f^n_t(z,u) := -\theta_t \vee -n\delta|z|$, and θ is given by (2.19). Then $|f^n_t(z,u)| \leq n\delta|z|$, $|f^n_t(z,u)| \leq \theta_t$ and the variation part satisfies :

$$d|\theta_t| << \frac{\delta}{2}|z|^2 + \frac{1}{\delta}(j_t(\delta u)+j_t(-\delta u))dt. \tag{2.27}$$

Using Theorem 8, there exists a triple (Y^n,Z^n,U^n) solution of the BSDE associated to (g^n,ψ_T). Moreover Y^n is a non-increasing $\mathcal{Q}_{\exp}(0,0,\delta)$ semimartingale which belongs to $\mathcal{D}_{\exp}$ and such that

$$\rho_{-\delta,t}(-\psi_T) \leq Y^n_t \leq \rho_{\delta,t}(\psi_T), \quad a.s. \tag{2.28}$$

Therefore, by Fatou's lemma, we have Y^n converge a.s. to a finite process Y which satisfies the same inequality (2.28). Now, since $Y^n \searrow Y$, if we denote by ${}^pX$ the predictable projection of any process X, we have that ${}^pY^n \searrow {}^pY$. Moreover, by assumption **A.1.**, for each $n\in\mathbb{N}$, the jumping times of Y^n are inaccessible. Therefore, for any predictable stopping time τ we have $Y^n_\tau = Y^n_{\tau-}$, thus ${}^pY^n = Y^n_-$, *a.s.*. So we have proved that $Y^n - Y$

and $Y_-^n - Y_-$ are non-increasing sequences which converge a.s. to 0, then from an extension of Dini theorem ([19], Lemme p. 202), we conclude that Y^n converge uniformly a.s. to a càdlàg process Y. Therefore, by the stability Theorem 2, Y is a quadratic exponential semimartingale. Moreover, the martingale part M of Y belongs to L^2 and $M = Z.W + U.N$ where $(Y, Z, U) \in \mathcal{D}_{\exp} \times \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2_\lambda$ is solution of the quadratic-exponential BSDE associated to (g, ψ_T). The integrability condition of the solution is obtained thanks to the inequalities (2.24), (2.25), (2.26) and (2.27).

□

2.5 Utility maximization problem for credit derivatives

In this section, we restrict our attention to the case of credit derivatives. We present the dynamics of the prices of the defaultable assets and solve the utility maximization of the terminal wealth for a fixed horizon T by means of BSDE see [57] and [52].

2.5.1 The model

We consider a financial market consisting of $d+1$ assets. The *money market* is instantaneously risk-free, the d *defaultable assets depend on the defaults of d firms.*
We assume that the default times τ_i are random times and we denote by H^i the default process (a counting process) $H^i_t = \mathbf{1}_{\tau_i \le t}$. We assume that Assumption A.1 is satisfied. The prices of the *defaultable assets* are supposed to satisfy :

$$dS^i_t = S^i_{t^-}\left[\mu^i_t dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma^{i,j}_t dN^j_t + \sum_{j=d+1}^{d+p} \sigma^{i,j}_t dW^{j-d}_t\right], i = 1, \dots, d \tag{2.29}$$

and the price of the *money market* is governed by :

$$dS^0_t = r_t S^0_t dt \tag{2.30}$$

Without lost of generality, we assume that $r = 0$. At time $t \in [0, T]$, the agent decides to invest the amounts $\left(\pi^1_t, \dots, \pi^d_t\right)$ in the *defaultable assets* and the remaining wealth in the money account. The wealth process associated with the corresponding self-financing strategy is :

$$dX_t^{x,\pi} = \pi_t \mu_t dt + \pi_t \sigma_t . dM_t; \quad X_0^{x,\pi} = x$$

where $M = (N^1, \cdots, N^d, W^1, \cdots, W^p)$. We impose that the strategies π belong to a given set of admissible strategies (see below).

Assumption A 2.

- *The appreciation rates $\mu^i, i = 1, \ldots, d$ are bounded predictable processes.*
- *For all $1 \leq i \leq d$ and $1 \leq j \leq d+p$, the processes $\sigma_t^{i,j}$ are bounded and predictable and, for all $1 \leq i \leq d$ and $d+1 \leq j \leq d+p$ satisfy $\sigma_t^{i,j} > -1$ a.s.*
- *The set $\mathcal{A}$ of admissible strategies is a compact set which contains* 0.

Assuming 2, the terminal wealth is square integrable. Our goal is to maximize the expectation of a utility function of the terminal wealth of an agent who sells a contingent claim with value ψ_T. Assuming that $U(x) = -\exp(-\delta x)$ for all $x > 0$, the problem is to find u^ψ defined as

$$u^\psi(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\big[- e^{-\delta(X_T^{x,\pi} - \psi_T)}\big] = - \inf_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\big[e^{-\delta(X_T^{x,\pi} - \psi_T)}\big] = -v(x). \tag{2.31}$$

The (selling) indifference price of $\psi_T \in \mathcal{G}_T$ is then defined as p such that $u^0(x) = u^\psi(x+p)$.

Lemma 1. *The family $\{\exp(-\delta X_\sigma^{x,\pi}) \,\big|\sigma$ is a $\mathbb{G}$-stopping time and $\pi \in \mathcal{A}\}$ is uniformly integrable.*

Proof : From Itô's formula, $d\exp(-\delta X_t^{x,\pi}) = \exp(-\delta X_{t-}^{x,\pi})\,(dM_t^\pi + dA_t^\pi)$ where the process A^π is with finite variation and the process M^π is a local martingale, given by :

$$dA_t^\pi = \left(\pi_t \mu_t + \frac{\delta^2}{2} \sum_{j=d+1}^{d+p} \left[\sum_{i=1}^{d} \pi_t^i \sigma_t^{i,j} \right]^2 + \sum_{i=1}^{d} \Big(e^{-\delta \sum_{j=1}^{d} \pi_t^j \sigma_t^{i,j}} + \delta \sum_{j=1}^{d} \pi_t^j \sigma_t^{i,j} - 1 \Big) \lambda_t^i \right) dt,$$

$$dM_t^\pi = \sum_{j=d+1}^{d+p} \sum_{i=1}^{d} -\delta \pi_t^i \sigma_t^{i,j} dW_t^{j-d} + \sum_{i=1}^{d} \Big(e^{-\delta \sum_{j=1}^{d} \pi_t^j \sigma_t^{i,j}} - 1 \Big) dN_t^i.$$

Assuming 2, the processes μ and σ are bounded. Since $\pi \in \mathcal{A}$, the process A^π is bounded and the martingale part M^π is BMO. Finally, in order to conclude that the family

$\exp(-\delta X^{x,\pi})$ is uniformly integrable we prove there exists a constant $\epsilon > 0$ such that $1 + \Delta M_t^\pi > \epsilon$ and we conclude using the Kazamaki lemma.

$$\Delta M_t^\pi = \sum_{i=1}^{d} \left(e^{-\delta \sum_{j=1}^{d} \pi_t^j \sigma_t^{i,j}} - 1 \right) dH_t^i > -1 + \inf_{\pi \in \mathcal{A}} \sum_{i=1}^{d} e^{-\delta \sum_{j=1}^{d} \pi_t^j \sigma_t^{i,j}} = -1 + \epsilon.$$

□

2.5.2 Dynamic programming and BSDEs

In order to solve the optimization problem, we will use dynamic programming principle in order to characterize the value function as a solution of a BSDE. As usual, the goal is to find an adapted process Y with terminal condition $Y_T = \psi_T$ such that the process $R_t^\pi = \exp[-\delta(X_t^\pi - Y_t)], t \leq T$ satisfies the following assertions :

i) The process R^π is a submartingale for any strategy $\pi \in \mathcal{A}$.

ii) The process R^{π^*} is a martingale for a strategy $\pi^* \in \mathcal{A}$.
Then the strategy π^* will be the optimal strategy.

Indeed, such a pair (Y, π^*) satisfies

$$\inf_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[e^{-\delta(X_T^{x,\pi} - \psi_T)}\right] \geq e^{-\delta(x - Y_0)} = \mathbb{E}\left[e^{-\delta(X_T^{x,\pi^*} - \psi_T)}\right]$$

Proposition 11. *Let $\psi_T \in \mathrm{L}^\infty$. The solution of the problem (2.31) is given by :*

$$u(x) = -\exp[-\delta(x - Y_0)]$$

where $(Y, Z, U) \in \mathcal{S}^\infty \times \mathbb{BMO} \times \mathcal{S}^\infty$ is the unique solution of the BSDE associated with (g, ψ_T) where

$$g_t(Y_t, Z_t, U_t) = \inf_{\kappa_t \in \bar{\mathcal{A}}_t} \left\{ \frac{1}{\delta} j_t(\delta(U_t - \widetilde{\kappa}_t)) - \widetilde{\kappa}_t . \widetilde{\theta}_t \lambda_t + \frac{\delta}{2} \left| \bar{\kappa}_t - (Z_t + \frac{\bar{\theta}_t}{\delta}) \right|^2 - Z_t . \bar{\theta}_t - \frac{|\bar{\theta}_t|^2}{2\delta} \right\}$$

where $\kappa_t := \pi_t \sigma_t$, $\bar{\mathcal{A}}_t := \mathcal{A} \sigma_t$ and the strategy κ is decomposed in two components $\widetilde{\kappa} = (\kappa^1, \cdots, \kappa^d)$ and $\bar{\kappa} = (\kappa^{d+1}, \cdots, \kappa^{d+p})$. The risk minimal premium $\theta_t = \sigma^{tr} (\sigma_t \sigma^{tr})^{-1} \mu_t$ is also decomposed in two components $\widetilde{\theta} = (\theta^1, \cdots, \theta^{d+1})$ and $\bar{\theta} = (\theta^{d+1}, \cdots, \theta^{d+p})$.

Proof : Let us find a process Y satisfying i) and ii) as the solution of a BSDE associated with (g, ψ_T) :

$$Y_t = \psi_T + \int_t^T g_s(Y_s, Z_s, U_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s - \int_t^T U_s.dN_s$$

where g is a unknown coefficient that will be defined through the properties i) and ii).

Applying Itô's formula, we obtain :

$$\begin{aligned} de^{-\delta(X_t^{x,\pi}-Y_t)} = &-\delta e^{-\delta(X_{t^-}^{x,\pi}-Y_{t^-})}d(X_t^{x,\pi}-Y_t) + \sum_{i=1}^d e^{-\delta(X_{t^-}^{x,\pi}-Y_{t^-})}\Big(e^{-\delta(\sum_{j=1}^d \pi_t^j\sigma_t^{i,j}-U_t^i)} \\ &+\delta(\sum_{j=1}^d \pi_t^j\sigma_t^{i,j}-U_t^i)-1\Big)dH_t^i + e^{-\delta(X_t^{x,\pi}-Y_t)}\frac{\delta^2}{2}d\langle (X^{x,\pi}-Y)^c\rangle_t \end{aligned}$$

Let $\kappa_t = \pi_t\sigma_t$, $\bar{\mathcal{A}}_t = \mathcal{A}\sigma_t$, and $\bar{\mathcal{A}}$ the set defined by $\kappa \in \bar{\mathcal{A}}$ if and only if $\kappa_t \in \bar{\mathcal{A}}_t(w)$ $\mathbb{P}$ a.s and let $\theta_t = \sigma_t^{tr}(\sigma_t\sigma_t^{tr})^{-1}\mu_t$, and let define $\widetilde{\kappa} = (\kappa^1, \cdots, \kappa^d)$ and $\bar{\kappa} = (\kappa^{d+1}, \cdots \kappa^{d+p})$; $\widetilde{\theta} = (\theta^1, \cdots, \theta^d)$ and $\bar{\theta} = (\theta^{d+1}, \cdots, \theta^{d+p})$. Then, we deduce :

$$\begin{aligned} de^{-\delta(X_t^{x,\pi}-Y_t)} = &\, e^{-\delta(X_{t^-}^{x,\pi}-Y_{t^-})}\Big(dM_t + \sum_{i=1}^d \Big[\big(e^{-\delta(\kappa_t^i-U_t^i)} + \delta(\kappa_t^i-U_t^i)-1\big)\lambda_t^i - \delta\kappa_t^i\theta_t^i\Big]dt \\ &+\frac{\delta^2}{2}\Big|\bar{\kappa}_t - (Z_t + \frac{\bar{\theta}_t}{\delta})\Big|^2 dt - \delta Z_t.\bar{\theta}_t dt - \frac{|\bar{\theta}|^2}{2}dt - \delta g_t(Y_t, Z_t, U_t)dt\Big) \end{aligned}$$

where M is a martingale. Hence, to satisfy properties i) and ii), the coefficent g should be given by :

$$g_t(Y_t, Z_t, U_t) = \inf_{\kappa_t\in\bar{\mathcal{A}}_t}\Big\{\frac{1}{\delta}j_t(\delta(U_t-\widetilde{\kappa}_t)) - \widetilde{\kappa}_t.\widetilde{\theta}_t\lambda_t + \frac{\delta}{2}\Big|\bar{\kappa}_t - (Z_t+\frac{\bar{\theta}_t}{\delta})\Big|^2 - Z_t.\bar{\theta}_t - \frac{|\bar{\theta}_t|^2}{2\delta}\Big\}$$

Using the fact that $0 \in \mathcal{A}$, we get that :

$$g_t(Y_t, Z_t, U_t) \leq \frac{\delta}{2}|Z_t|^2 + \frac{1}{\delta}j_t(\delta U_t), \quad a.s \quad \forall t \leq T. \tag{2.32}$$

Moreover the following inequality is satisfied :

$$\frac{1}{\delta}j_t[-\delta(\bar{\kappa}_t - U_t)] + \frac{\delta}{2}\Big|\bar{\kappa}_t - (Z_t + \frac{\bar{\theta}_t}{\delta})\Big|^2 \geq 0, \quad a.s \quad \forall t \leq T.$$

As the strategies κ_t belong to a compact set, using the explicit expression of g, there exists a bounded adapted process $l_t \geq 0$ such that :

$$-l_t - \big(Z_t.\bar{\theta}_t + \frac{|\bar{\theta}_t|^2}{2\delta}\big) \leq g_t(Y_t, Z_t, U_t), \quad a.s \quad \forall t \leq T. \tag{2.33}$$

Since the coefficient g of the BSDE satisfies (2.32) then the processs Y is a entropic submartingale, $Y_t \leq \rho_{\delta,t}(\psi_T)$. The terminal condition ψ_T is bounded, hence there exists a constant C_1 s.t $Y \leq C_1$.
Since the coefficient g of the BSDE satisfies (2.33) then the process Y satisfies for all $t \leq T$:

$$\psi_T + \int_t^T \big(- l_s - Z_s.\bar{\theta}_s - \frac{|\bar{\theta}_s|^2}{2\delta} \big) ds - \int_t^T Z_s.dW_s - \int_t^T U_s.dN_s \leq Y_t, \quad a.s; \qquad (2.34)$$

where the process $l = (l_t)_{t \leq T}$ and $\theta = (\widetilde{\theta}, \bar{\theta})$ are bounded. Consider the probability measure $\mathbb{Q}$ equivalent to $\mathbb{P}$ with the Radon-Nikodym density $Z^{\mathbb{Q}}$ given by :

$$\frac{dZ_t^{\mathbb{Q}}}{Z_t^{\mathbb{Q}}} = -\bar{\theta}_t.dW_t, \quad t \leq T.$$

Since the process θ is bounded, the martingale $(-\bar{\theta}.W)$ is BMO, and $Z^{\mathbb{Q}} = \mathcal{E}(-\bar{\theta}.W)$ is uniformly integrable martingale. Using Girsanov's theorem, the process $\widetilde{W}$ defined by :

$$d\widetilde{W}_t = dW_t + \bar{\theta}_t dt$$

is a $\mathbb{Q}$-martingale, then using (2.34), we obtain :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\psi_T - \int_t^T Z_s.(dW_s + \bar{\theta}_s ds) - \int_t^T \left(l_s + \frac{|\bar{\theta}_s|^2}{2\delta} \right) ds \Big| \mathcal{G}_t \right] \leq Y_t, \qquad \text{a.s } t \leq T.$$

Therefore since $\psi_T \in \mathrm{L}^\infty$, and since the process l and $\bar{\theta}$ are bounded, we deduce there exists a constant C_2 such that $C_2 \leq Y_t$, a.s $t \leq T$. Finally, we conclude that the process Y is a bounded entropic submartingale. As Y is a bounded entropic submartingale, we use the same approximation $(g^n)_{n \in \mathbb{N}}$ of the coefficient of the BSDE g given by (2.20), and we conclude that the solution (Y^n, Z^n, U^n) associated with (g^n, ψ_T) where Y^n is a bounded decreasing entropic submartingale converges a.s uniformly to a process $Y \in \mathcal{S}^\infty$. Moerover

$$l_t - \big(z.\bar{\theta}_t + \frac{|\bar{\theta}_t|^2}{2\delta} \big) \leq g_t(z,u) \leq g_t^n(z,u) \leq \frac{\delta}{2}|z|^2 + \frac{1}{\delta} j_t(\delta u), \quad a.s \quad \forall t \leq T.$$

then we conclude :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |g_t^n(Z_t^n, U_t^n)| dt\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T \big(\frac{\delta}{2}|Z_t^n|^2 + \frac{1}{\delta} j_t(\delta U_t^n)\big) dt + \int_0^T \big(|l_t| + |Z_t^n.\bar{\theta}_t| + \frac{|\bar{\theta}_t|^2}{2\delta}\big) dt\right]$$

Since $\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_t^n.\bar{\theta}_t|dt\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_t^n|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}.\mathbb{E}\left[\int_0^T |\bar{\theta}_t|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$, using the BMO property of $Z^n.W$ and the boundness of the processes U^n, $\bar{\theta}$ and l we obtain that there exists a constant C such that :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |g_t^n(Z_t^n, U_t^n)|dt\right] \leq C$$

Therefore, by applying Theorem 1, there exists a triple $(Y, Z, U) \in \mathcal{S}^\infty \times \text{BMO} \times S^\infty$ associated with the BSDE (g, ψ_T). We prove that the martingale part of bounded entropic submartingale Y is BMO by using stability results given in Proposition 7. In order to prove uniqueness of the solution, we shall apply Proposition 9.

Let us prove that the coefficient g satisfies the condition $\mathcal{A}_\gamma$. For $t \leq T, z \in \mathbb{R}^p$ and $u, \bar{u} \in \mathbb{R}^d$, one has :

$$g_t(z,u) - g_t(z,\bar{u}) \leq \sup_{\kappa_t \in \mathcal{A}_t} \frac{1}{\delta} \left\{ j_t\left[\delta(u - \widetilde{\kappa}_t)\right] - j_t\left[\delta(\bar{u} - \widetilde{\kappa}_t)\right] \right\}$$

Let $j^i(u^i) = (e^{u^i} - u^i - 1)\lambda^i, \forall i = 1, \cdots, d$, then :

$$j_t(x) - j_t(y) = \int_0^1 \frac{\partial j_t^i}{\partial u^i}\left[\nu x + (1-\nu)y\right](x-y)d\nu, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Using the fact that $j_t(u) = \sum_{i=1}^d j_t^i(u^i)$, we obtain :

$$g_t(z,u) - g_t(z,\bar{u}) \leq \sup_{\kappa_t \in \mathcal{A}_t} \left\{ \sum_{i=1}^d \int_0^1 \frac{\partial j_t^i}{\partial u^i}\left[\delta\nu(u^i - \widetilde{\kappa}_t^i) + \delta(1-\nu)(\bar{u}^i - \widetilde{k}_t^i)\right](u^i - \bar{u}^i)d\nu \right\}$$

From $\frac{\partial j_t^i}{\partial u^i} = (e^{u^i} - 1)\lambda_t^i$, we deduce

$$g_t(z,u) - g_t(z,\bar{u}) \leq \sum_{i=1}^d \gamma_t^i(u^i, \bar{u}^i)(u^i - \bar{u}^i)\lambda_t^i, \quad t \leq T, u^i, \bar{u}^i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots d$$

where

$$\gamma_t^i(u^i, \bar{u}^i) = -1 + \sup_{\kappa_t \in \mathcal{A}_t} \int_0^1 e^{\left[\nu(u_t^i - \widetilde{\kappa}_t^i) + (1-\nu)(\bar{u}^i - \widetilde{\kappa}_t^i)\right]} d\nu \mathbf{1}_{\{u^i \geq \bar{u}^i\}}$$
$$+ \inf_{\kappa_t \in \mathcal{A}_t} \int_0^1 e^{\left[\nu(u_t^i - \widetilde{\kappa}_t^i) + (1-\nu)(\bar{u}^i - \widetilde{\kappa}_t^i)\right]} d\nu \mathbf{1}_{\{u^i < \bar{u}^i\}}$$

Since u^i is bounded and κ_t^i is bounded for all $t \leq T$, there exist for all i, two positive constants δ^i, c^i such that $-1 + \delta^i \leq \gamma(u^i, \bar{u}^i) \leq c^i$. We conclude that the coefficient g

satisfies the condition $(\mathcal{A}_\gamma)$.

One has to check that the coefficient g satisfies the condition (2.21). For all $z^1, z^2 \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^d$ and $t \in [0,T]$, we have :

$$
\begin{aligned}
|g_t(z^1,u) - g_t(z^2,u)| &\leq \sup_{\kappa_t \in \mathcal{A}_t} \left| \frac{\delta}{2} \left(\left| \bar{\kappa}_t - (z^1 + \tfrac{\bar{\theta}_t}{\delta}) \right|^2 - \left| \bar{\kappa}_t - (z^2 + \tfrac{\bar{\theta}_t}{\delta}) \right|^2 \right) - (z^1 - z^2).\bar{\theta}_t \right| \\
&\leq \sup_{\kappa_t \in \mathcal{A}_t} \left(\frac{\delta}{2} |z^1 - z^2| (|z^1| + |z^2| + 2|\bar{\kappa}_t| + \frac{2|\bar{\theta}_t|}{\delta}) + |\bar{\theta}_t||z^1 - z^2| \right)
\end{aligned}
$$

Since $\kappa_t \in \mathcal{A}_t$ a compact set and since the process θ is bounded, there exists $C > 0$ such that :

$$
|g_t(z^1,u) - g_t(z^2,u)| \leq C \left(1 + |z^1| + |z^2|\right) |z^1 - z^2|,
$$

which yields condition (2.21). $\square$

2.6 Appendix

2.6.1 BMO martingales and quadratic-exponential semimartingales

In this part, the goal is to give the properties of martingale part of $q_{\exp}$-semimartingales. We shall in particular characterize $q_{\exp}$-canonical semimartingales associated with a martingale in terms of BMO properties.

Definition 13. *A martingale M is BMO if there is constant $c_M > 0$ such that for any stopping time $0 \leq \sigma \leq \tau \leq T$:*

$$
\mathbb{E}\left[[M,M]_{\sigma-}^{\tau} | \mathcal{G}_\sigma \right] \leq c_M^2
$$

The smallest constant c_M is called the BMO-norm of M. In terms of the martingale representation $M = M^c + U.N$, M is BMO if and only if :

$$
\mathbb{E}\left[\langle M^c \rangle_\sigma^\tau + \int_{[\sigma,\tau]} |U_s|^2.dH_s | \mathcal{G}_\sigma \right] \leq c_M^2
$$

Definition 14. *Let X be a semimartingale and define :*

$$\max|X_s^t| = \max\{|X_u - X_s|; s \leq u \leq t\} \qquad s \leq t.$$

X is a BMO-semimartingale if there exists a constant $c > 0$ such that for any stopping times $0 \leq \sigma \leq \tau \leq T$:

$$\mathbb{E}\left[\max|X_\sigma^\tau||\mathcal{G}_\sigma\right] \leq c^2$$

For a martingale M, we denote by $r(M)$ and $r(-M)$ the $q_{\exp}$-canonical semimartingales given by :

$$\begin{aligned} r(M)_t &= M_t^c - \frac{1}{2}\langle M^c\rangle_t + \int_0^t U_s.dN_s - \int_0^t j(U_s)ds \\ r(-M)_t &= -M_t^c - \frac{1}{2}\langle M^c\rangle_t - \int_0^t U_s.dN_s - \int_0^t j(-U_s)ds \end{aligned} \tag{2.35}$$

Proposition 12. *Let $M = M^c + U \cdot N$ be a $\mathbb{G}$-martingale such that $r(M)_T$ and $r(-M)_T$ belong to $L^1_{\exp}$. Then, the following statements are equivalent :*
(i) The martingale M is BMO
(ii) The processes $r(M)$ and $r(-M)$ are BMO-semimartingales.
Under any of the assumptions, the processes $M^c + (e^U - 1).N$ and $-M^c + (e^{-U} - 1).N$ belong to $\mathcal{U}_{\exp}$.

Proof : Let assume first that $M = M^c + U.N$ is a BMO-martingale. Then, for all pair of stopping times $0 \leq \sigma \leq \tau \leq T$, we have

$$\mathbb{E}\left[\langle M^c\rangle_\sigma^\tau + \int_{[\sigma,\tau]} |U_s|^2.dH_s|\mathcal{G}_t\right] \leq c_M^2, \ a.s.$$

Thus, we have $\mathbb{E}\left[\langle M^c\rangle_\sigma^\tau\right] \leq c_M^2$ and $|U^i_{\tau^i}| \leq c_M$ for any $i = 1 \cdots, d$. Moreover, by using Lemma 3, we have $|U_t^i| \leq c_M$, *a.s.* for each $t \in [0, T]$. Therefore, there exists a constant $C > 0$ such that :

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\langle M^c\rangle_\sigma^\tau + \int_\sigma^\tau j(U_t)dt|\mathcal{G}_\sigma\right] \leq C \quad \text{and} \quad \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\langle M^c\rangle_\sigma^\tau + \int_\sigma^\tau j(-U_t)dt|\mathcal{G}_\sigma\right] \leq C.$$

Since

$$\mathbb{E}\left[\max|M_\sigma^\tau||\mathcal{G}_\sigma\right] \leq 2(\mathbb{E}\left[[M]_{\sigma-}^\tau - [M]_{\sigma-}^\sigma|\mathcal{G}_\sigma\right])^{\frac{1}{2}} \leq 2(\mathbb{E}\left[[M]_{\sigma-}^\tau|\mathcal{G}_\sigma\right])^{\frac{1}{2}} \leq 2c_M$$

We conclude that there exists two strictly positive constants $c_{r(M)}$ and $c_{r(-M)}$ such that :

$$\mathbb{E}\left[\max|r(M)_\sigma^\tau||\mathcal{G}_\sigma\right] \le c_{r(M)}, \qquad \mathbb{E}\left[\max|r(-M)_\sigma^\tau||\mathcal{G}_\sigma\right] \le c_{r(-M)}. \tag{2.36}$$

It remains to show that the martingales $M^c + (e^U - 1).N, -M^c + (e^{-U} - 1).N \in \mathcal{U}_{\exp}$. By using Jensen's inequality, we establish that for all $\sigma \in [0,T]$,

$$-\ln \mathbb{E}\left[\exp\left(r(M)_\sigma^T\right)|\mathcal{G}_\sigma\right] \le \mathbb{E}\left[-r(M)_\sigma^T|\mathcal{G}_\sigma\right] \le c_{r(M)},\ a.s. \tag{2.37}$$

Hence, $r(M)_{\sigma^-} \le \rho_\sigma\left(r(M)_T\right) + c_{r(M)}$ and

$$\exp\left(r(M)_\sigma\right) \le \exp(c_{r(M)})\mathbb{E}\left[\exp(r(M)_T|\mathcal{G}_\sigma\right].$$

Since $\exp\left(r(M)\right) = \mathcal{E}\left(M^c + (e^U - 1).N\right)$, the martingale $M^c + (e^U - 1).N$ belongs to $\mathcal{U}_{\exp}$. We use the same arguments to deduce that the martingale $-M^c + (e^{-U} - 1).N$ belongs to $\mathcal{U}_{\exp}$.

Conversely, assume the assertion (ii) holds : the processes $r(M)$ and $r(-M)$ are BMO-semimartingales. Since $M^c + (e^U - 1).N$ and $-M^c + (e^{-U} - 1).N$ belong to $\mathcal{U}_{\exp}$, we have for any stopping times $\sigma \le \tau$:

$$\mathbb{E}\left[\langle M^c\rangle_\sigma^\tau + \int_\sigma^\tau (j(U_s) + j(-U_s)).\lambda_s ds|\mathcal{G}_\sigma\right] = \mathbb{E}\left[-r(M)_\sigma^\tau - r(-M)_\sigma^\tau|\mathcal{G}_\sigma\right].$$

Using the obvious inequality, $|U_t|^2.\lambda_t \le (j(U_t) + j(-U_t))$, we conclude that for any stopping times $\sigma \le \tau$:

$$\mathbb{E}\left[\langle M^c\rangle_\sigma^\tau + \int_\sigma^\tau |U_s|^2.\lambda_s ds|\mathcal{G}_\sigma\right] \le c_{r(M)} + c_{r(-M)}.$$

□

We will need the following preliminary result to prove the John-Nirenberg inequality (see [44], [53]) :

Lemma 2. *Let A be an increasing adapted process such that, for any $\tau > \sigma$*

$$\mathbb{E}\left[A_\tau - A_{\sigma^-}|\mathcal{G}_\sigma\right] \le K,\ a.s.$$

Then, $\forall\, 0 \le \delta \le \frac{1}{K}$*,*

$$\rho_\sigma\left(A_\tau\right) \le A_\sigma + \kappa(\delta, K), \qquad \textit{where } \kappa(\delta,K) = -\frac{1}{\delta}\ln\left(1-\delta K\right).$$

Proof : We prove first by induction that, for any $p \in N$ and for all $\sigma \le \tau$, we have :

$$\mathbb{E}\left[\left(A_\tau - A_{\sigma^-}\right)^p \middle| \mathcal{G}_\sigma\right] \le p! K^p. \tag{2.38}$$

Obviously, the inequality (2.38) is satisfied for $p = 1$. Assuming that (2.38) holds for the order $p-1$, we have, using the fact that x^p is a convex function :

$$\left(A_\tau - A_{\sigma-}\right)^p \le \left(A_\tau - A_{\sigma-} - \Delta A_\sigma\right)^p + p\Delta A_\sigma \left(A_\tau - A_{\sigma-}\right)^{p-1} = \left(A_\tau - A_\sigma\right)^p + p\Delta A_\sigma\left(A_\tau - A_{\sigma-}\right)^{p-1}.$$

Using the fact that : $\left(A_\tau - A_\sigma\right)^p \le p\int_\sigma^\tau (A_\tau - A_{u-})^{p-1}\, dA_u$, one gets :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\left(A_\tau - A_{\sigma-}\right)^p\big|\mathcal{G}_\sigma\Big] &\le p\mathbb{E}\Big[\int_\sigma^\tau \mathbb{E}\big[(A_\tau - A_{u-})^{p-1}\big|\mathcal{G}_u\big]\, dA_u\Big|\mathcal{G}_\sigma\Big] + p\Delta A_\sigma \mathbb{E}\Big[\left(A_\tau - A_{\sigma-}\right)^{p-1}\Big|\mathcal{G}_\sigma\Big] \\ &\le p!K^{p-1}\mathbb{E}\Big[A_\tau - A_\sigma\big|\mathcal{G}_\sigma\Big] + p!K^{p-1}\Delta A_\sigma = p!K^{p-1}\mathbb{E}\Big[A_\tau - A_{\sigma-}\big|\mathcal{G}_\sigma\Big] \le p!K^p.\end{aligned}$$

Therefore, for $\delta < \frac{1}{K}$, one obtains :

$$\mathbb{E}\Big[\exp\left(\delta\left(A_\tau - A_{\sigma-}\right)\right)\big|\mathcal{G}_\sigma\Big] \le \frac{1}{1-\delta K}.$$

Finally, by taking the logarithm on both sides of the last inequality and multiplying by $1/\delta$, one get our statement. $\square$

Proposition 13. *Let M be a BMO-martingale,with BMO-norm c_M. Then,*

i) For any stopping times $\sigma \le \tau$ and constant $\delta < \frac{1}{c_M^2}$,

$$\rho_{\delta,\sigma}\left([M]_{\sigma-}^\tau\right) \le \kappa(\delta, c_M^2)$$

.

ii) the John-Nirenberg exponential inequality holds true for $\delta < \frac{1}{2c_M}$:

$$\rho_{\delta,\sigma}\left(\max\, |M_\sigma^\tau|\right) \le \kappa(\delta, 2c_M)$$

.

iii) For $\delta < \frac{1}{c_{r(M)}}$, where $c_{r(M)}$ is defined in (2.36)

$$\rho_{\delta,\sigma}\left(\max |r(M)_\sigma^\tau|\right) \le \kappa(\delta, c_{r(M)})$$

Proof : The result is a direct consequence on Lemma 2 applied to the increasing process $[M]$, $\max|M|$ and $\max|r(M)|$ respectively. $\square$

We give now a characterization of BMO-martingales by using entropic processes, following [5] :

Proposition 14. *The following statements are equivalent :*
i) M is a BMO-martingale.
ii)There exists $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ and non negative constants a_1, a_2 such that for any stopping time $\tau \leq T$:

$$\begin{aligned} r(M)_\tau &\leq a_1 + \rho_{\alpha_1,\tau}\left(r(M)_T\right) \\ r(-M)_\tau &\leq a_2 + \rho_{\alpha_2,\tau}\left(r(-M)_T\right) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Proof : a) Let us prove first that assertion ii) implies i).From (2.37), we have :

$$\rho_{-\alpha_1,\tau}\left(r(M)_\tau^T\right) \geq a_1, \quad \text{and} \rho_{-\alpha_2,\tau}\left(r(-M)_\tau^T\right) \geq a_2$$

and, using properties of entropic processes, these inequalities are equivalent to

$$\rho_{\alpha_1,\tau}\left(-r(M)_\tau^T\right) \leq a_1, \quad \rho_{\alpha_2,\tau}\left(-r(-M)_\tau^T\right) \leq a_2\,.$$

By using the concavity property of the logarithm function, we get :

$$\mathbb{E}\left[\langle M^c\rangle_\tau^T + \int_\tau^T (j(U_s)+j(-U_s))ds|\mathcal{G}_\tau\right] = \mathbb{E}\left[-r(M)_\tau^T - r(-M)_\tau^T\middle|\,\mathcal{G}_\tau\right] \leq a_1 + a_2$$

then

$$\mathbb{E}\Big[\langle M^c\rangle_\tau^T + \int_\tau^T |U_s|^2.\lambda_s ds\Big|\mathcal{G}_\tau\Big] \leq a_1 + a_2$$

b) Let us prove now that assertion i) implies ii). Assuming that M is a BMO martingale, then, from Proposition 13, we obtain for $\delta \leq \frac{1}{c_{r(M)}}$, where $c_{r(M)}$ is defined in the proof of Proposition 12 :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\delta}\ln\left[\mathbb{E}\left(\exp(-\delta r(M)_\tau^T)\right)|\mathcal{G}_\tau\right] \leq \kappa(\delta, c_{r(M)}) \Longrightarrow r(M)_\tau \leq \rho_{-\delta,\tau}(r(M)_T) + \kappa(\delta, c_{r(M)}) \\ &\frac{1}{\delta}\ln\left[\mathbb{E}\left(\exp(\delta r(M)_\tau^T)\right)|\mathcal{G}_\tau\right] \leq \kappa(\delta, c_{r(M)}) \Longrightarrow \rho_{\delta,\tau}(r(M)_T) - \kappa(\delta, c_{r(M)}) \leq r(M)_\tau. \end{aligned}$$

Take now $\alpha_1 = \delta$, $a_1 = \kappa(\delta, c_{r(M)})$ in order to achieve the proof for the right hand side of the inequality (2.39). We use similar arguments for $r(-M)$. $\square$

We now prove a stability result for the BMO-property under a change of probability measure :

Proposition 15. *Let $L = L^c + l.N$ be a BMO-martingale and let $\widetilde{L} = L^c + (e^l - 1).N$. Then, $\mathcal{E}(\widetilde{L})$ is a strictly positive uniformly integrable martingale. We denote by $\mathbb{Q}$ the probability measure $d\mathbb{Q} = \mathcal{E}(\widetilde{L})d\mathbb{P}$. Then for $p, q > 1$, such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, for any stopping times $0 \leq \sigma \leq \tau \leq T$ and for any $\mathcal{G}_\tau$ measurable random variable $X_\tau \in \mathrm{L}^{\exp}$:*

$$\rho^{\mathbb{Q}}_{1,\sigma}(X_\tau) \leq \rho_{1,\sigma}\left(X_\tau + r(\widetilde{L})^\tau_\sigma\right) \leq \rho_{p,\sigma}(X_\tau) + \rho_{q,\sigma}\left(r(\widetilde{L})^\tau_\sigma\right)$$

Moreover for any BMO-martingale M with BMO-norm c_M, and for any $\theta \leq \frac{1}{\sqrt{pc_M}}$, and setting $\kappa_q(\widetilde{L}) = \rho_{q,\sigma}\left(r(\widetilde{L})^\tau_\sigma\right)$

$$\rho^{\mathbb{Q}}_{1,\sigma}\left([\theta M]^\tau_{\sigma-}\right) \leq \rho_{p,\sigma}\left([\theta M]^\tau_{\sigma-}\right) + \kappa_q(\widetilde{L})$$

Proof : Let $L = L^c + l.N$, by Proposition 12, the martingale $\mathcal{E}(\widetilde{L})$ is u.i. Denoting by $\mathbb{Q}$ the probability $d\mathbb{Q} = \mathcal{E}(\widetilde{L})d\mathbb{P}$ leads to :

$$\exp\left(\rho^{\mathbb{Q}}_{1,\sigma}(X_\tau)\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp(X_\tau)|\mathcal{G}_\sigma\right] = \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(\widetilde{L})^\tau_\sigma.\exp(X_\tau)|\mathcal{G}_\sigma\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(r(\widetilde{L})^\tau_\sigma + X_\tau\right)|\mathcal{G}_\sigma\right]$$

Since for any $F, G \in \mathcal{G}_\tau$, and any $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\rho_{1,\sigma}\left(F + G\right) \leq \rho_{p,\sigma}(F) + \rho_{q,\sigma}(G), \qquad \sigma \leq \tau, \tag{2.40}$$

we obtain

$$\rho^{\mathbb{Q}}_{1,\sigma}(X_\tau) \leq \rho_{p,\sigma}(X_\tau) + \rho_{q,\sigma}\left(r(\widetilde{L})^\tau_\sigma\right).$$

Setting $X_\tau = [\theta M]^\tau_{\sigma-}$, Proposition 13 leads to $\rho_{p,\sigma}\left([\theta M]^\tau_{\sigma-}\right) \leq c_M$, for $\theta \leq \frac{1}{\sqrt{pc_M}}$. Therefore, there exists a constant $C > 0$ such that $\rho^{\mathbb{Q}}_{p,\sigma}\left([\theta M]^\tau_{\sigma-}\right) \leq C$, and the concavity of the logarithm function give us $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left([\theta M]^\tau_{\sigma-}|\mathcal{G}_\sigma\right) \leq C$. Note that the $\mathbb{Q}$ martingale $M^{\mathbb{Q}} = M - \langle M, \widetilde{L}\rangle$ has quadratic variation $[M^{\mathbb{Q}}] = [M]$. $\square$

2.6.2 Universal Bound for quadratic exponential semimartingale

We give now a universal bound for quadratic exponential semimartingale with general structure condition $\mathcal{Q}_{\exp}(\Lambda, A, \delta)$ which is crucial in our approach, in particular to get the existence results for quadratic BSDE's (Theorem 3 and Theorem 4).

Proposition 16. *(Universal Bound) Let $X = X_0 + V + M$ be a quadratic exponential semimartingale which satisfies the structure condition $\mathcal{Q}_{\exp}(\Lambda, A, \delta)$ and with the terminal condition $X_T = \psi_T$. Then, $\mathbb{P}$-a.s. and for any $t \in [0, T]$:*

$$|X_t| \leq \rho_{\delta,t}\big(e^{A_t^T}|\psi_T| + \int_t^T e^{A_t^s} d\Lambda_s\big).$$

Proof : Using Tanaka's formula, we get :

$$de^{A_s}|X_s| = e^{A_s}(d|X_s| + |X_s|.dA_s) = e^{A_s}(|X_s|.dA_s + \operatorname{sign}(X_{s^-})(dV_s + dM_s) + dL_s^X),$$

where L^X is the local time of X at 0. Let $M_t = M_t^c + \int_0^t U_s.dN_s, t \leq T$, since X is a $q_{\exp}$ semimartingale then the process B defined by $dB_s = \operatorname{sign}(X_{s^-})dV_s + \frac{\delta}{2}d\langle M^c\rangle_s + \frac{1}{\delta}j[\delta \operatorname{sign}(X_{s^-})U_s]ds + |X_s|dA_s + d\Lambda_s$ is an increasing process. Therefore, we get :

$$\begin{aligned}
de^{A_s}|X_s| =& e^{A_s}(|X_s|.dA_s + \operatorname{sign}(X_{s^-})dV_s + \frac{\delta}{2}d\langle M^c\rangle_s + \frac{1}{\delta}j[\delta \operatorname{sign}(X_{s^-})U_s]ds + d\Lambda_s + dL_s^X))\\
&+ e^{A_s}(\operatorname{sign}(X_{s^-})dM_s - \frac{\delta}{2}d\langle M^c\rangle_s - \frac{1}{\delta}j[\delta \operatorname{sign}(X_{s^-})U_s]ds - d\Lambda_s).
\end{aligned}$$

We have also :

$$\begin{aligned}
de^{A_s}|X_s| =& e^{A_s}(dB_s + dL_s^X)) + e^{A_s}(\operatorname{sign}(X_{s^-})dM_s - \frac{\delta}{2}d\langle M^c\rangle_s - \frac{1}{\delta}j[\delta \operatorname{sign}(X_{s^-})U_s]ds - d\Lambda_s)\\
&= e^{A_s}\operatorname{sign}(X_{s^-})dM_s - \frac{\delta}{2}d\langle e^{A_s}\operatorname{sign}(X_{s^-})M^c\rangle_s - \frac{1}{\delta}j[\delta e^{A_s}\operatorname{sign}(X_{s^-})U_s]ds - e^{A_s}d\Lambda_s\\
&+ e^{A_s}(dB_s + dL_s^X)) + \left(\frac{\delta}{2}d\langle e^{A_s}M^c\rangle_s - \frac{\delta}{2}e^{A_s}d\langle M^c\rangle_s\right)\\
&+ \left(\frac{1}{\delta}j[\delta e^{A_s}\operatorname{sign}(X_{s^-})U_s] - e^{A_s}\frac{1}{\delta}j[\delta \operatorname{sign}(X_{s^-})U_s]\right) ds.
\end{aligned}$$

Since for any $k \geq 1$ and for any $x \in \mathbb{R}^d$, $j(kx) \geq kj(x)$, and since A is an increasing process with initial condition $A_0 = 0$, we get $j[\delta e^{A_s}\operatorname{sign}(X_{s^-})U_s] - e^{A_s}j[\delta \operatorname{sign}(X_{s^-})U_s] \geq 0$. Moreover for any $s \geq 0$, $\frac{\delta}{2}\langle e^{A_s}M^c\rangle_s - \frac{\delta}{2}e^{A_s}\langle M^c\rangle_s \geq 0$, then we obtain :

$$de^{A_s}|X_s| = e^{A_s}\operatorname{sign}(X_{s^-})dM_s - \frac{\delta}{2}d\langle e^{A_s}\operatorname{sign}(X_{s^-})M^c\rangle_s - \frac{1}{\delta}j[\delta e^{A_s}\operatorname{sign}(X_{s^-})U_s]ds - e^{A_s}d\Lambda_s + dC_s \tag{2.41}$$

where C is an increasing process. Define the process $Y = \exp[\delta(e^{A_t}|X_t| + \int_0^t e^{A_s} d\Lambda_s)]$. By applying Itô's formula and using (2.41), we deduce that the process Y is a submartingale, thus we have :

$$\exp[\delta(e^{A_t}|X_t| + \int_0^t e^{A_s} d\Lambda_s)] \leq \mathbb{E}\left[\exp[\delta(e^{A_T}|X_T| + \int_0^T e^{A_s} d\Lambda_s)]\Big|\mathcal{G}_t\right].$$

Therefore we get, $\mathbb{P}$-$a.s.$, for any $t \in [0, T]$:

$$|X_t| \leq \rho_{\delta,t}\left(e^{A_t^T}|\psi_T| + \int_t^T e^{A_t^s} d\Lambda_s\right).$$

In order to achieve the proof, we have to prove that for any $x \in \mathbb{R}^d$, $k \geq 1$, $j(kx) \geq kj(x)$. Let define $g(x) := j(kx) - kj(x) = \sum_{i=1}^d \left[(e^{kx^i} - kx^i - 1) - k(e^{x^i} - x^i - 1)\right]\lambda^i$. Since λ^i is positive then to prove the assertion it is sufficient to prove that the function defined by $\bar{g}(y) = (e^{ky} - 1) - k(e^y - 1)$, for any $y \in \mathbb{R}$ is positive. We have :

$$\bar{g}'(y) = ke^y(e^{(k-1)y} - 1), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Since $k \geq 1$, then the function $\bar{k}$ is decreasing on $(-\infty, 0)$ and increasing on $(0, +\infty)$. Finally we get :

$$\bar{g}[(-\infty, 0)] = (\bar{g}(0), \bar{g}(-\infty)) = (0, k-1) \subset (0, +\infty),$$

$$\bar{g}[(0, +\infty)] = (\bar{g}(0), \bar{g}(+\infty)) = (0, +\infty) \subset (0, +\infty).$$

Therefore we get $\bar{g}(\mathbb{R}) \subset (0, +\infty)$, hence the function $\bar{g}$ is positive and we deduce $j(kx) \geq kj(x)$, for any $x \in \mathbb{R}^d$ and $k \geq 1$. □

2.6.3 Technical lemma

We prove the following technical result :

Lemma 3. *Let X and Y two $\mathbb{G}$-predictable processes such that $Y_{\tau_i} = X_{\tau_i}$. Then, $X_t = Y_t$ on $(\tau_i \geq t)$ a.s. Moreover, if $X_{\tau_i} \leq Y_{\tau_i}$, then $X_t \leq Y_t$ a.s on $(\tau_i \geq t)$.*

Proof : Assume that X and Y are bounded. If $X_{\tau_i} = Y_{\tau_i}$, then $\int_0^\infty |X_t - Y_t| dH_t^i = 0$, and

$$0 = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty |X_t - Y_t| dH_t^i\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t - Y_t| \lambda_t^i dt\right].$$

Therefore, we have $X_t = Y_t$ on $(\tau \geq t)$. Moreover, if $X_{\tau_i} \leq Y_{\tau_i}$, we consider the predictable process V defined as $V_t = Y_t \mathbf{1}_{X_t \leq Y_t}$. Then $V_\tau = Y_\tau$ and by using the first part of the proof, we obtain $V_t = Y_t$ on $(\tau \geq t)$. The general case follows □

2.6.4 Lipschitz BSDEs with Jumps

In this section, we give conditions which insure the existence of a solution for a BSDE with jumps assuming the coefficient g is Lipschitz. We give a priori estimates of the solution and a comparison theorem.

Theorem 5. *Assume that* $\psi_T \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}_T, \mathbb{P})$ *and that the generator* $g : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ *is* $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$*-measurable and satisfies :*

i) $\mathbb{E}\Big(\int_0^T |g_t(0,0,0)|^2 dt \Big) < \infty$

ii) There exists a positive constant C *such that for all* $0 \leq t \leq T, y, y', z, z' \in \mathbb{R}^p, u, u' \in \mathbb{R}^d$

$$|g_t(y,z,u) - g_t(y',z',u')| \leq C(|y-y'| + |z-z'| + |u-u'|_{\lambda,t})$$

where $|u|_{\lambda,t} = \Big(\sum_{i=1}^d |u^i|^2 \lambda_t^i \Big)^{\frac{1}{2}}$.

Then there exists a triple $(Y,Z,U) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2_\lambda$ *which solves the BSDE :*

$$Y_t = \psi_T + \int_t^T g_s(Y_s, Z_s, U_s) ds - \int_t^T Z_s.dW_s - \int_t^T U_s.dN_s$$

Moreover there exists a constant $c > 0$ *such that :*

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 + \int_0^T |Z_t|^2 dt + \int_0^T |U_t|^2_{\lambda,t} dt \Big) \leq c\mathbb{E}\Big(|\psi_T|^2 + \int_0^T |g_t(0,0,0)|^2 dt \Big)$$

Proof : Let $\mathcal{D}_\alpha$ be the space $\mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2_\lambda$ equiped with the norm :

$$||Y,Z,U||_\alpha = \Big[\mathbb{E} \int_0^T e^{\alpha s} (|Y_s|^2 + |Z_s|^2 + |U_s|^2 \lambda_s) ds \Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Let Ψ be the application from $\mathcal{D}_\alpha$ into $\mathcal{D}_\alpha$ defined by :

$$\Psi(u,v,w) = (Y_t^{u,v,w}, Z_t^{u,v,w}, U_t^{u,v,w})_{t \leq T}.$$

where $(Y^{u,v,w}, Z^{u,v,w}, U^{u,v,w})$ is the solution of the BSDE associated with the coefficient $g_t^{u,v,w} = g_t(u_t, v_t, w_t), t \leq T$.

Applying Itô's formula to $e^{\alpha t}|Y_t^{u,v,w} - Y_t^{u',v',w'}|^2$ yields to :

$$e^{\alpha s}|Y_t^{u,v,w} - Y_t^{u',v',w'}|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}|Z_s^{u,v,w} - Z_s^{u',v',w'}|^2 ds + \int_t^T e^{\alpha s}|U_s^{u,v,w} - U_s^{u',v',w'}|_{\lambda,s}^2 ds$$
$$= M_T - M_t + 2\int_t^T e^{\alpha s}(Y_s^{u,v,w} - Y_s^{u',v',w'})(-\frac{\alpha}{2}(Y_s^{u,v,w} - Y_s^{u',v',w'}) + g_s(u_s, v_s, w_s)$$
$$- g_s(u'_s, v'_s, w'_s))ds$$

where

$$M_t = 2\int_0^t e^{\alpha s}(Y_s^{u,v,w} - Y_s^{u',v',w'}) \left[(Z_s^{u,v,w} - Z_s^{u',v',w'}).dW_s + (U_s^{u,v,w} - U_s^{u',v',w'}).dN_s\right]$$
$$- \int_0^t (U_s^{u,v,w} - U_s^{u',v',w'}))^2 .dN_s$$

The martingale $(M_t)_{t\leq T}$ is uniformly integrable. Using the Liptschitz-continuous property of g we obtain :

$$\mathbb{E}\left[e^{\alpha s}|Y_t^{u,v,w} - Y_t^{u',v',w'}|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}|Z_s^{u,v,w} - Z_s^{u',v',w'}|^2 ds + \int_t^T e^{\alpha s}|U_s^{u,v,w} - U_s^{u',v',w'}|_{\lambda,s}^2 ds\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\int_t^T e^{\alpha s}(Y_s^{u,v,w} - Y_s^{u',v',w'})(-\alpha(Y_s^{u,v,w} - Y_s^{u',v',w'}) + 2C\left(|u_s - u'_s| + |v_s - v'_s| + |w_s - w'_s|_{\lambda,s}\right) ds\,.$$

Then, using the inequality $-\alpha a^2 + 2Cab = -\alpha\big(a - \frac{C}{\alpha}\big)^2 + \frac{C^2}{\alpha^2}b^2 \leq \frac{C^2}{\alpha^2}b^2$, we obtain

$$\mathbb{E}\left[e^{\alpha s}|Y_t^{u,v,w} - Y_t^{u',v',w'}|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}|Z_s^{u,v,w} - Z_s^{u',v',w'}|^2 ds + \int_t^T e^{\alpha s}|U_s^{u,v,w} - U_s^{u',v',w'}|_{\lambda,s}^2 ds\right]$$
$$\leq \frac{3C^2}{\alpha^2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left(|u_s - u'_s|^2 + |v_s - v'_s|^2 + |w_s - w'_s|_{\lambda,s}^2\right) ds\right].$$

It follows that

$$||Z^{u,v,w} - Z^{u',v',w'}||_\alpha^2 \leq \frac{3C^2}{\alpha^2}||(u - u', v - v', w - w')||_\alpha^2,$$
$$||U^{u,v,w} - U^{u',v',w'}||_\alpha^2 \leq \frac{3C^2}{\alpha^2}||(u - u', v - v', w - w')||_\alpha^2.$$

Moreover

$$||Y^{u,v,w} - Y^{u',v',w'}||_\alpha^2 \leq \frac{3C^2}{\alpha^2}\int_0^T ||(u-u', v-v', w-w')||_\alpha^2 dt = \frac{3C^2 T}{\alpha^2}||(u-u', v-v', w-w')||_\alpha^2.$$

Therefore there exists a constant $K > 0$ depending only on C and T such that :

$$||(Y^{u,v,w} - Y^{u',v',w'}, Z^{u,v,w} - Z^{u',v',w'}, U^{u,v,w} - U^{u',v',w'})||_\alpha^2 \leq \frac{K}{\alpha}||(u-u', v-v', w-w')||_\alpha^2.$$

For $\alpha > K$, the map Ψ is contracting on the Hilbert space $\mathcal{D}_\alpha$. The fixed point theorem ensures the existence of a unique triple $(Y, Z, U) \in \mathcal{D}_\alpha$ such that $\Psi(Y, Z, U) = (Y, Z, U)$. $\square$

We give now a comparison theorem under Lipschitz condition on the coefficient, and the proof is a particular case of the more general result given in Theorem 7 :

Theorem 6. *Let $(Y, Z, U) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2_\lambda$ (resp. (Y', Z', U')) be the solution of the BSDE associated with (g, ψ_T) (resp. (g', ψ'_T)) where $\psi_T, \psi'_T \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{G}_T, \mathbb{P})$ and the coefficients g, g' satisfy the hypotheses given in Theorem 5. Moreover, we assume that*

i) $\psi_T \leq \psi'_T$

ii) $g_t(y, z, u) \leq g'_t(y, z, u)$, a.s for all $(t, y, z, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$,

(iii) g' satisfies the condition (A_γ).

Then, we have :

$$Y_t \leq Y'_t, \quad \mathbb{P}\text{- a.s } \forall t \in [0, T]$$

2.6.5 Existence and comparison theorem for the linear growth case

Theorem 7. *Let a terminal condition ψ be bounded and the coefficient g be given by $g_t(z, u) = \frac{\delta}{2}|z|^2 + \frac{1}{\delta}j(\delta u) + f_t(z, u)$ where :*

i) the function f has a linear growth in z, namely, there exists a positive constant C s.t $|f_t(z, u)| \leq C(1 + |z|), \forall t \in [0, T], z \in \mathbb{R}^p$. We assume also that, $\mathbb{P}$-a.s. for any $t \in [0, T]$, the function $(z, u) \longmapsto f_t(z, u)$ is continuous.

ii) $\dfrac{\partial g_t}{\partial z}(y, z, u) \leq c|z|$, where c a positive constant.

Then :

a) There exists a unique maximal solution $(Y, Z, U) \in \mathcal{S}^\infty \times \mathbb{BMO} \times \mathcal{S}^\infty$ of the BSDE associated with (g, ψ_T).

b) Let (Y^i, Z^i, U^i) be the solutions of the BSDE associated with (g^i, ψ^i), for $i = 1, 2$ where the coefficient g^i satisfies the condition $(\mathcal{A}_\gamma)$ and the hypotheses i) and ii) where the functions $f^i, i = 1, 2$ are Liptschitz in z. Assume that $g^1 \leq g^2$, and $\psi_T^1 \leq \psi_T^2$. Then,

$$Y_t^1 \leq Y_t^2, \quad a.s\ \forall\, t \in [0, T]$$

Proof : a) Using Itô's formula :

$$d\exp(\delta Y_t) = \exp(\delta Y_t)\left[f_t(Z_t, U_t)dt + \delta Z_t.dW_t + (e^{\delta U_t} - 1).dN_t\right].$$

We define the processes $\bar{Y}_t = \exp(\delta Y_t)$, $\bar{Z}_t = \delta \exp(\delta Y_t) Z_t$, $\bar{\delta U}_t^i = \exp(\delta Y_t)[\exp(\delta U_t^i) - 1]$, $i = 1, \cdots, d$, and $\bar{f}_t(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t, \bar{U}_t) = \bar{Y}_t f_t\left(\frac{\bar{Z}_t}{\bar{Y}_t}, \frac{1}{\delta}\ln(1 + \frac{\bar{U}_t}{\bar{Y}_t}\right)$. The function f has linear growth with respect to z and the semimartingale Y is uniformly bounded, then, there exists a constant $\bar{C} > 0$ such that :

$$\bar{f}_t(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t, \bar{U}_t) \leq C\left(1 + \frac{|\bar{Z}_t|}{\bar{Y}_t}\right) \leq \bar{C}(1 + |\bar{Z}_t|).$$

Since $\bar{f}$ has linear growth (with respect to $\bar{z}$), an adaptation to the jump case of the existence result of Lepeltier and San Martin [51] insures that the BSDE associated with $(\bar{f}, \psi_T)$ admits a maximal solution.

b) Consider now $(g^i, \psi_T^i), i = 1, 2$ such that $g^1 \leq g^2$ and $\psi_T^1 \leq \psi_T^2$. We assume that the coefficient $g^i, i = 1, 2$ satisfies the condition $(\mathcal{A}_\gamma)$ and the above conditions i) and ii) where $f^i, i = 1, 2$ are Liptschitz continuous in z. Setting $\Delta Y = Y^1 - Y^2$, $\Delta Z = Z^1 - Z^2$, $\Delta U = U^1 - U^2$ and $\Delta\psi = \psi_T^1 - \psi_T^2$, we obtain :

$$\begin{aligned} -d\Delta Y_t = {} & \frac{\delta}{2}\left(|Z_t^1|^2 - |Z_t^2|^2\right)dt + \frac{1}{\delta}\left(j(\delta U_t^1) - j(\delta U_t^2)\right)dt + \left(f_t^1(Z_t^1, U_t^1) - f_t^2(Z_t^2, U_t^2)\right)dt \\ & - \Delta Z_t.dW_t - \Delta U_t.dN_t. \end{aligned} \tag{2.42}$$

We have obviously the inequality $\frac{\delta}{2}(|Z^1|^2 - |Z^2|^2) \leq (Z^1 - Z^2).\delta Z^1$. Moreover, using the fact that the function j is convex, we have :

$$\frac{1}{\delta}[j_t(\delta U_t^1) - j_t(\delta U_t^2)] \leq \sum_{i=1}^{d}(e^{\delta U_t^{1,i}} - 1)(U_t^{1,i} - U_t^{2,i})\lambda_t^i dt.$$

Plotting the two inequalities in the equation (2.42), we get :

$$\begin{aligned} \Delta Y_t \leq \Delta\psi + \int_t^T \left(f_s^1(Z_s^1, U_s^1) - f_s^2(Z_s^2, U_s^2)\right) ds - \int_t^T \Delta Z_s.(dW_s - \delta Z_s^1 ds) \\ - \sum_{i=1}^{d}\int_t^T \Delta U_s^i(dN_s^i - (e^{\delta U_s^{1,i}} - 1)\lambda_s^i ds). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Consider the probability measure $\mathbb{Q}^1$ equivalent to $\mathbb{P}$ with Radon-Nikodym density given by $Z^{\mathbb{Q}^1}$ where :

$$\frac{dZ_t^{\mathbb{Q}^1}}{Z_{t^-}^{\mathbb{Q}^1}} = \delta Z_t^1.dW_t + \left[e^{\delta U_t^1} - 1\right].dN_t, \quad a.s., \forall\, t \in [0, T].$$

The triple (Y^1, Z^1, U^1) is solution of quadratic exponential BSDE with bounded condition, then by Proposition 8, we have that $Z^1.W + (e^{\delta U^1} - 1).N$ is BMO martingale. Moreover, by using Proposition 12, the martingale $Z^{\mathbb{Q}^1} = \mathcal{E}\left(\delta Z^1.W + (e^{\delta U^1} - 1).N\right)$ is uniformly integrable. By Girsanov theorem, the processes $\widetilde{W}$ and $\widetilde{N}$ defined by :

$$\begin{aligned} d\widetilde{W}_t &= dW_t - \delta Z^1 dt, \\ d\widetilde{N}_t^i &= dN_t^i - (e^{\delta U_t^{1,i}} - 1)\lambda_t^i dt, \quad i = 1, \ldots, d \end{aligned}$$

are $\mathbb{Q}^1$-martingales. Hence, taking the conditional $\mathbb{Q}^1$-expectation in (2.43), we get :

$$\Delta Y_t \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^1}\left[\Delta\psi + \int_t^T \left(f_s^1(Z_s^1, U_s^1) - f_s^2(Z_s^2, U_s^2)\right) ds \Big| \mathcal{G}_t\right]. \tag{2.44}$$

Since the function f^2 is Liptschitz with respect to z and g satisfies $(\mathcal{A}_\gamma)$, there exist two positive constants κ, $C > 0$ and a family of functions $\gamma_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying $-1 + \kappa \leq \gamma_i(u^i, \bar{u}^i) \leq C$ for any $(u^i, \bar{u}^i) \in \mathbb{R}^2, i = 1, \cdots, d$ such that :

$$|f_t^2(z^1, u^1) - f_t^2(z^2, u^1)| \leq C|z^1 - z^2|, \quad t \leq T, z^1, z^2 \in \mathbb{R}^p$$

$$f_t^2(z^1, u^1) - f_t^2(z^1, u^2) \leq \sum_{i=1}^{d} \gamma_t^i(u^{1,i}, u^{2,i})(u^{1,i} - u^{2,i})\lambda_t^i, \quad t \leq T, u^{1,i}, u^{2,i} \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, d.$$

Then we may rewrite (2.44) as :

$$\Delta Y_t \le \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^1}\left[\Delta\psi + \int_t^T \left((f_s^1(Z_s^1,U_s^1) - f_s^2(Z_s^1,U_s^1)) + (f_s^2(Z_s^1,U_s^1) - f_s^2(Z_s^2,U_s^2))\right) ds \Big| \mathcal{G}_t\right]. \tag{2.45}$$

Therefore, since $f^1 \le f^2$, we get :

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &\le \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^1}\left[\Delta\psi + \int_t^T \left(f_s^2(Z_s^1,U_s^1) - f_s^2(Z_s^2,U_s^1) + f_s^2(Z_s^2,U_s^1) - f_s^2(Z_s^2,U_s^2))\right) ds \Big| \mathcal{G}_t\right].\\ &\le \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^1}\left[\Delta\psi + \int_t^T \left(f_s^2(Z_s^1,U_s^1) - f_s^2(Z_s^2,U_s^1) - \sum_{i=1}^d \int_t^T \Delta U_s^i(d\widetilde{N}_s^i - \gamma_s^i(U_s^1,U_s^2)\lambda_s^i ds)\right) \Big| \mathcal{G}_t\right]\end{aligned} \tag{2.46}$$

Define the processes $\bar{Z}^{1,i} = (Z^{2,1},\ldots,Z^{2,i-1},Z^{1,i},\ldots,Z^{1,p}$)and $\bar{Z}^{2,i} = (Z^{2,1},\ldots,Z^{2,i},Z^{1,i+1},\cdots Z^{1,p})$, for $i = 1,\ldots,p$ and introduce the following processes : for all $i = 1,\cdots,p, \quad t \le T$

$$\beta_t^i(Z_t^1,Z_t^2) = \begin{cases} \dfrac{f_t^2(\bar{Z}^{1,i},U_t^1) - f_t^2(\bar{Z}^{2,i},U_t^1)}{Z^{1,i} - Z^{2,i}}, & \text{if} \quad Z^{1,i} \ne Z^{2,i},\\ 0, & \text{if} \quad Z^{1,i} = Z^{2,i}.\end{cases}$$

Then, we have $f_t^2(Z_t^1,U_t^1) - f_t^2(Z_t^2,U_t^1) = \sum_{i=1}^p \beta_t^i(Z_t^1,Z_t^2)(Z_t^{1,i} - Z_t^{2,i})$ with $|\beta_t(Z_t^1,Z_t^2| \le C$ for all $t \in [0,T]$ since f is Liptschitz-continuous with respect to Z. Then, by using (2.46) we get :

$$\begin{aligned}\Delta Y_t &\le \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^1}\left[\Delta\psi + \int_t^T \left(f_s^2(Z_s^1,U_s^1) - f_s^2(Z_s^2,U_s^1) + f_s^2(Z_s^2,U_s^1) - f_s^2(Z_s^2,U_s^2))\right) ds \Big| \mathcal{G}_t\right]\\ &\le \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^1}[\Delta\psi + \int_t^T \big(\sum_{i=1}^d \Delta Z_s^i(d\widetilde{W}_s^i - \beta_s^i(Z_s^1,Z_s^2)ds)\\ &+ \sum_{i=1}^d \int_t^T \Delta U_s^i(d\widetilde{N}_s^i - \gamma_s^i(U_s^1,U_s^2)e^{-\delta U_s^{1,i}}\widetilde{\lambda}_s^i ds)\big)\Big|\mathcal{G}_t].\end{aligned} \tag{2.47}$$

Define the probability measure $\bar{\mathbb{Q}}$ with Radon-Nikodym measure $Z^{\bar{\mathbb{Q}}}$ with respect to $\mathbb{Q}^1$ given by :

$$\frac{dZ_t^{\bar{\mathbb{Q}}}}{Z_{t^-}^{\bar{\mathbb{Q}}}} = \beta_t(Z_t^1,Z_t^2).d\widetilde{W}_t + \gamma_t(U_t^1,U_t^2)e^{-\delta U_t^1}.d\widetilde{N}_t.$$

Therefore, since $-1+\kappa \leq \gamma_t^i(U_t^1, U_t^2) \leq C$ and $|\beta_t(Z_t^1, Z_t^2)| \leq C$ for all $t \in [0,T]$, we have that under the probability measure $\mathbb{Q}^1$, $\beta.W + \gamma e^{-\delta U^1}.N$ is BMO-martingale using the Proposition 15. Thus, $Z^{\bar{\mathbb{Q}}}$ is uniformly integrable and $\Delta Y_t \leq \mathbb{E}^{\bar{\mathbb{Q}}}\left[\Delta\psi|\mathcal{G}_t\right] \leq 0$, and then $Y_t^1 \leq Y_t^2$ a.s. □

Remark 4. *In this comparison theorem, we need only that the condition (A_γ) holds true for the coefficient f^2. Moreover, we get the uniqueness result for the solution of such BSDE as a consequence of the comparison theorem.*

2.6.6 Linear growth coefficient and exponential integrable terminal condition

In this part, we shall extend the results obtained in the last section for a terminal condition ψ belongs to $\mathrm{L}^{\exp}$.

Theorem 8. *Let ψ be a terminal condition which belongs to $\mathrm{L}^{\exp}$ and a coefficient g given by $g_t(z,u) = \frac{\delta}{2}|z|^2 + \frac{1}{\delta}j(\delta u) + f_t(z,u)$ such that :*

i) the function f has a linear growth in z, namely, there exists a positive constant C s.t $|f_t(z,u)| \leq C(1+|z|), \forall t \in [0,T], z \in \mathbb{R}^p$. We assume also that $\mathbb{P}$-a.s. for any $t \in [0,T]$, the function $(z,u) \longmapsto f_t(z,u)$ is continuous.

ii) $\dfrac{\partial g_t}{\partial z}(y,z,u) \leq c|z|$, where c a positive constant. Then :

a) there exists a unique maximal solution $(Y,Z,U) \in \mathcal{D}_{\exp} \times \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2_\lambda$ of the BSDE associated with (g, ψ_T).

b) Moreover if we consider the solutions (Y^i, Z^i, U^i) of the BSDE associated to (g^i, ψ^i), fore $i = 1,2$ where the coefficient g^i satisfying the hypothesis i) and ii) and such the functions $f^i, i = 1,2$ are Liptschitz in z and satisfying the condition ($\mathcal{A}_\gamma$). Then, we have that

$$Y_t^1 \leq Y_t^2, \quad a.s., \; \forall\, t \in [0,T]$$

whenever, we assume $g^1 \leq g^2$, and $\psi_T^1 \leq \psi_T^2$.

Proof : a) Using Itô's formula, we get :

$$d\exp(\delta Y_t) = \exp(\delta Y_t)\left[f_t(Z_t,U_t)dt + \delta Z_t.dW_t + (e^{\delta U_t} - 1).dN_t\right].$$

Let us define the processes $\bar{Y}_t = \exp(\delta Y_t)$, $\bar{Z}_t = \delta \exp(\delta Y_t) Z_t$ and $\bar{\delta U}_t^i = \exp(\delta Y_t)[\exp(\delta U_t^i) - 1]$, $i = 1, \cdots, d$, and $\bar{f}_t(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t, \bar{U}_t) = \bar{Y}_t f_t\left(\frac{\bar{Z}_t}{\bar{Y}_t}, \frac{1}{\delta}\ln(1 + \frac{\bar{U}_t}{\bar{Y}_t}\right)$. Then, there exists a positive constant $\bar{C} > 0$ such that :

$$\bar{f}_t(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t, \bar{U}_t) \leq C\left(|\bar{Y}_t| + |\bar{Z}_t|\right).$$

Since $\bar{f}$ has linear growth (with respect to z and y) and the terminal condition $\bar{Y}_T = \exp(\psi_T) \in \mathrm{L}^p$, then an adaptation in the jump case of the existence result of Lepeltier and San Martin [51] insure that the BSDE associated WITH $(\bar{f}, \psi_T)$ admits a maximal solution.

b) Let assume g satisfy the $\mathcal{Q}_{\exp}(0, 0, \delta)$, and let (Y, Z, U) be the solution of the BSDE associated with (g, ψ_T) where $\psi_T \in \mathrm{L}^{\exp}$. Then, from Remark 1, the martingale $\delta Z.W + (e^{\delta U} - 1).N$ belongs to $\mathcal{U}_{\exp}$. Therefore, we can use the same methodology by changing the probability to prove the comparison theorem. $\square$

Chapitre 3

Robust utility maximization in a discontinuous filtration

3.1 Introduction

We study a problem of utility maximization under model uncertainty. The problem is formulated as a sup/inf, the supremum being over a terminal value and an intermediate control and the infimum over a set of models (measures) $\mathcal{Q}$. We extend the work of Bordogoni, Matoussi and Schweizer [13] to the case of a discontinuous filtration and prove that the solution of the robust problem is a solution of a quadratic-exponential backward stochastic differential equation. Moreover, we prove a dynamic maximum principle for the maximization problem which generalizes the results of Duffie and Skiadas [21] and El Karoui et al. [25] to the robust case and including model with jumps. We deal with the problem of utility maximization from a terminal value and an intermediate control under model uncertainty. In the standard problem of utility maximization, one assumes that the investor knows the "historical" probability $\mathbb{P}$ that describes the dynamics of the state process. In reality, the investor has some uncertainty on this probability. This has led Bordigoni, Matoussi and Schweizer [13], denoted hereafter [BMS], to introduce the set $\mathcal{Q}$ of probability measures absolutely continuous with respect to the reference model measure $\mathbb{P}$, and to choose "a worst case" criteria in the optimization problem. More precisely, the goal is to solve

$$\sup_{\pi,c}\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}}\mathbf{U}\left((\psi,c),\mathbb{Q}\right) \tag{3.1}$$

where ψ runs through a set of random variables, c through a set of control processes and $\mathbb{Q}$ through a set of models (measures), and where the criteria $\mathbf{U}\left((\psi,c),\mathbb{Q}\right)$ is the sum of a $\mathbb{Q}$-expected utility and a term relative to the relative entropy (*a penalization term*). This approach has been suggested by [1] and [40]. Some results in the robust maximization problem have been obtained in Gundel [36] , Quenez [66], Schied and Wu [68], Skiadas [73] in the case of continuous filtration. Schied [67] has been working on the problem (3.1) with a fairly general penalization term for $\mathbb{Q}$. However, his (static) results do not contain ours ; they only cover the simple case $\delta\equiv 0$.Bordigoni [13] has used classical optimization technics to study the same problem in the continuous case. Our first motivation is to extend the results of [BMS] to a discontinuous filtration concerning the *inf* problem and then to study the maximization problem. We also extend some results obtained by the second author in [32] where the utility maximization part of the problem is studied in the case of a continuous filtration, and in a complete market. As in [BMS], the primary inspiration clearly comes from the papers [73, 70, 71, 72]. In [73], Skiadas studies essentially the optimization problem (3.1), and proves that the dynamic value process V can be described by some quadratic BSDE. Skiadas points out that the BSDE coincides with the one describing a stochastic differential utility ; hence working with a standard expected utility under (a particular form of) model uncertainty is equivalent to working with a corresponding stochastic differential utility under a fixed model. Our second source of inspiration is the work of Anderson with coauthors in [1, 40] in which more references can be found. These authors introduce and discuss the basic problem of robust utility maximization when model uncertainty is penalized by a relative entropy term. Both papers are cast in a Markovian setting and use mainly formal manipulations of Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equations to provide insights about the optimal investment behaviour in these situations.

By using BSDE technics, we generalize the characterization of optimality obtained by El Karoui, Quenez and Peng [25] in the framework of robust case and including model with jumps. Indeed, we derive a maximum principle which gives a necessary and sufficient condition of optimality. Our results may also be considered as a generalization of the works of ([21, 70, 71, 72]).

The paper is structured as follows. Section 2 presents the model and the form of the criteria $\mathbf{U}(\cdot, \mathbb{Q})$. In Section 3, we show that the optimal model measure exists. Section 4 provides the optimal control using a BSDE approach. For a specific choice of utility functions, the value function is given in Section 5 in terms of the optimal plan. The final Section 6 contains a technical proof concerning a regularity result of our generalized quadratic-exponential backward stochastic differential equation.

3.2 The Model and the Robust Optimization Problem

In this section, we present the optimization problem relative to the choice of an optimal probability measure.

3.2.1 The Model

We consider a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$. All the processes are $\mathbb{G}$-adapted, and defined on the time interval $[0, T]$ where T is the finite horizon. We recall that any special $\mathbb{G}$-semimartingale Y admits a canonical decomposition $Y = Y_0 + A + M^{Y,c} + M^{Y,d}$ where A is a predictable finite variation process, $M^{Y,c}$ is a continuous martingale and $M^{Y,d}$ is a discontinuous martingale.

Assumption A 3. *We make the following assumptions :*
1) For each $i = 1, \dots, d$, H^i is a counting process and there exists a positive adapted process λ^i, called the $\mathbb{P}$ intensity of H^i, such that the process N^i with $N^i_t := H^i_t - \int_0^t \lambda^i_s ds$ is a martingale. We assume that the processes $H^i, i = 1, \dots, d$ have no common jumps.
2) Any discontinuous martingale admits a representation of the form $dM^{Y,d}_t = \sum_{i=1}^d y^i_t dN^i_t$ where $y^i, i = 1, \dots, d$ are predictable processes.

This hypothesis is satisfied in the case where the filtration is generated by a Brownian motion and an inhomogeneous Poisson process and in the case of credit risk, under immersion property (see Kusuoka [46] for details).

Definition 15.

$L^{\exp}$ is the space of all $\mathcal{G}_T$-measurable random variables X with

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\gamma|X|\right)\right] < \infty \qquad \textit{for all } \gamma > 0$$

$D_0^{\exp}$ is the space of all progressively measurable processes $X = (X_t)_{0\leq t\leq T}$ with

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\gamma \ \operatorname{ess\,sup}_{0\leq t\leq T}|X_t|\right)\right] < \infty \qquad \textit{for all } \gamma > 0$$

$D_1^{\exp}$ is the space of all progressively measurable processes $X = (X_t)_{0\leq t\leq T}$ such that

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\gamma\int_0^T |X_s|ds\right)\right] < \infty \qquad \textit{for all } \gamma > 0$$

$\mathcal{M}_0^p(\mathbb{P})$ is the space of all $\mathbb{P}$-martingales $M = (M_t)_{0\leq t\leq T}$ with $M_0 = 0$ and $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big[\sup_{0\leq t\leq T}|M_t|^p\big] < \infty$

$\mathcal{L}^2(\lambda, \mathbb{P})$ is the space of all $\mathbb{R}^d$-valued predictable processes X such that $\displaystyle\sum_{i=1}^d \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\int_0^T (X_s^i)^2\lambda_s^i ds\Big] < \infty$

We denote by $\mathcal{H}^2(\mathbb{P})$ the space $\mathcal{L}^2(\lambda, \mathbb{P})$ for $\lambda = 1$

$\mathcal{S}^2(\mathbb{P})$ is the space of all $\mathbb{R}$-valued predictable processes X such that $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_s|^2\Big] < \infty$

Definition 16.

For any probability measure $\mathbb{Q}$ on $(\Omega, \mathcal{G}_T)$,

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) := \begin{cases} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\ln \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{G}_T}\right] & \textit{if } \mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \textit{ on } \mathcal{G}_T \\ +\infty & \textit{otherwise} \end{cases}$$

is the relative entropy of $\mathbb{Q}$ with respect to $\mathbb{P}$. We denote by $\mathcal{Q}_f$ the space of all probability measures $\mathbb{Q}$ on $(\Omega, \mathcal{G}_T)$ with $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ on $\mathcal{G}_T$ and $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) < +\infty$. Note that the reference probability measure $\mathbb{P}$ belongs to $\mathcal{Q}_f$.

3.2.2 The robust optimization problem

We define the discounting process $S_t^\delta := e^{-\int_0^t \delta_s ds}$ for all $t \in [0, T]$ where δ is a non-negative adapted process. For $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_f$, we denote by $Z^{\mathbb{Q}} = (Z_t^{\mathbb{Q}})_{0\leq t\leq T}$ (a càdlàg $\mathbb{P}$-martingale) its Radon-Nikodym density with respect to $\mathbb{P}$. Let U be a given process (the cost process) and $\bar{U}_T$ a given random variable (the terminal target). The robust utility maximization problem $\mathcal{P}(U, \bar{U}_T, \beta)$ is to find the infimum of $\Gamma(\mathbb{Q})$ over the set $\mathcal{Q}_f$ where

$$\Gamma(\mathbb{Q}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T S_s^\delta U_s ds + S_T^\delta \bar{U}_T\right] + \beta \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T \delta_s S_s^\delta \ln Z_s^{\mathbb{Q}} ds + S_T^\delta \ln Z_T^{\mathbb{Q}}\right]. \tag{3.2}$$

The first term in the right-hand side of (3.2) will be linked, in the following section, to the $\mathbb{Q}$-expected discounted utility from target and cost process. The second term is a discounted relative entropy term and $\beta > 0$ is a given positive constant which determines the strength of this penalty term. Note that the optimal probability $\mathbb{Q}$ for the problem $\mathcal{P}(U, \bar{U}_T, \beta)$ is optimal for the minimization problem $\mathcal{P}(U^\beta, \bar{U}_T^\beta, 1)$ where $U^\beta = U/\beta$, $\bar{U}_T^\beta = \bar{U}_T/\beta$, therefore, we shall restrict our attention to the problem $\mathcal{P}(U, \bar{U}_T) := \mathcal{P}(U, \bar{U}_T, 1)$.

Assumption A 4. *For a more precise formulation of our problem, we make the following further assumptions :*

i) the discount rate δ is a non-negative bounded process, more precisely there exists $\epsilon > 0$ such that for any $t \geq 0$, $0 < \epsilon \leq \delta_t \leq \|\delta\|_\infty$, a.s.

ii) the cost process U belongs to $D_1^{\exp}$ and the terminal target $\bar{U}_T$ is in $L^{\exp}$.

iii) the process $\Lambda_t^i := \int_0^t \lambda_s^i ds$ is assumed to be uniformly bounded, i.e., $\Lambda_T^i \leq C$, a.s..

Remark 5. *The assumption iii) is a technical hypothesis needed only in the proof of Theorem 12.*

3.3 The Optimal Model Measure

In this section, we study the characterization of the optimal probability measure for the minimization problem $\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \Gamma(\mathbb{Q})$. We recall the general result on existence and uniqueness given in [BMS] :

Proposition 17. *Under Assumptions A3-A4, there exists a unique $\mathbb{Q}^*$ which minimizes $\Gamma(\mathbb{Q})$ over all $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_f$:*

$$\Gamma(\mathbb{Q}^*) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}_f} \Gamma(\mathbb{Q}) \tag{3.3}$$

Furthermore, $\mathbb{Q}^*$ is equivalent to $\mathbb{P}$.

We use stochastic control techniques to study the value process V associated with this optimization problem. We show that V is the unique solution of a backward stochastic differential equation (BSDE) with a quadratic-exponential driver :

$$\begin{cases} dY_t = \Big[j_t(-y_t) - U_t + \delta_t Y_t\Big]dt + \frac{1}{2}d\langle M^{Y,c}\rangle_t + dM_t^{Y,c} + \sum_{i=1}^{d} y_t^i dN_t^i \\ \\ Y_T = \bar{U}_T \end{cases} \tag{3.4}$$

A solution of (3.4) is a triple $(Y, M^{Y,c}, y)$ where Y is a $\mathbb{P}$-semimartingale, $M^{Y,c}$ is a locally square-integrable continuous local $\mathbb{P}$-martingale null at 0 and $y = (y^1, \cdots, y^d)$ an $\mathbb{R}^d$-valued predictable locally bounded process. Note that Y is special $\mathbb{P}$-semimartingale.

3.3.1 Some properties of solutions of the BSDE

We establish some auxiliary results about the existence and uniqueness of the solutions of (3.4).

Proposition 18. *Let $(Y, M^{Y,c}, y) \in D_0^{\exp} \times \mathcal{M}_{0,loc}^c(\mathbb{P}) \times \mathcal{L}^2(\lambda, \mathbb{P})$ be a solution of the BSDE (3.4). Then, Y satisfies the following recursion equality : for any stopping time τ valued in $[t, T]$,*

$$Y_t = -\ln \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\Big(-Y_\tau + \int_t^\tau (\delta_s Y_s - U_s)ds\Big)\Big|\mathcal{G}_t\right]. \tag{3.5}$$

Proof : Assume that $(Y, M^{Y,c}, y)$ is a solution of (3.4), and define

$$X_t = Y_t - Y_0 - \int_0^t (\delta_s Y_s - U_s)ds$$

and $Z_t = e^{-X_t}$. An application of Itô's formula leads to

$$dZ_t = Z_{t-}\left(-dM_t^{Y,c} + \sum_{i=1}^{d}\left(e^{-y_t^i} - 1\right)dN_t^i\right)$$

hence, Z is a non-negative local martingale. Assuming that Z is a martingale, one obtains, for $t < \tau < T$:

$$e^{-Y_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-Y_\tau + \int_t^\tau (\delta_s Y_s - U_s)ds\right)\Big|\mathcal{G}_t\right]. \tag{3.6}$$

In general, we use a localizing sequence τ_n in order to have the $\mathbb{P}$-martingale property and thus obtain (3.6) and (3.5) with $\tau_n \wedge \tau$ instead of τ. Then by the integrability Assumption 4 and the assumption that $Y \in D_0^{\exp}$, we obtain a $\mathbb{P}$-integrable upper bound for the right-hand side of (3.6) and letting n go to infinity, by dominated convergence we obtain (3.5) for τ. $\square$

In the case $\delta = 0$, the process Y, part of the solution of (3.4) is given in a closed form as

$$Y_t = -\ln \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\bar{U}_T - \int_t^T U_s ds\right)\Big|\mathcal{G}_t\right].$$

We give now the main result of this section which extends earlier works by [50, 73, 70] and [BMS] :

Theorem 9. *There exists a unique triple $(Y, M^{Y,c}, y) \in D_0^{\exp} \times \mathcal{M}_0^p(\mathbb{P}) \times \mathcal{L}^2(\lambda, \mathbb{P})$ solution of* (3.4). *Furthermore, the optimal measure $\mathbb{Q}^*$ solution of* (3.3) *admits the Radon-Nikodym density $Z^{\mathbb{Q}^*} = \mathcal{E}(L)$ w.r.t. $\mathbb{P}$ where*

$$dL_t = -dM_t^{Y,c} + \sum_{i=1}^d \left(e^{-y_t^i} - 1\right) dN_t^i, \quad L_0 = 0. \tag{3.7}$$

Proof :

Step 1 : In this step, we follow closely [BMS]. For $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_f^e$, the space of probability measures equivalent to $\mathbb{P}$ with finite entropy, we denote by $L^{\mathbb{Q}}$ the stochastic logarithm of $Z^{\mathbb{Q}}$, i.e., the $\mathbb{P}$-local martingale such that $dZ_t^{\mathbb{Q}} = Z_{t-}^{\mathbb{Q}} dL_t^{\mathbb{Q}}$. From Assumption 3, the local martingale $L^{\mathbb{Q}}$ admits the decomposition

$$dL_t^{\mathbb{Q}} = dL_t^{\mathbb{Q},c} + \sum_{i=1}^d \ell_t^i dN_t^i,$$

where $L^{\mathbb{Q},c}$ is a continuous $\mathbb{P}$-local martingale, and ℓ^i are predictable processes, and one has

$$d\ln Z_t^{\mathbb{Q}} = dL_t^{\mathbb{Q},c} - \frac{1}{2} d\langle L^{\mathbb{Q},c}\rangle_t + \sum_{i=1}^d \ln(1+\ell_t^i) dN_t^i + \sum_{i=1}^d (\ln(1+\ell_t^i) - \ell_t^i)\lambda_t^i dt. \tag{3.8}$$

Following [BMS], we establish that there exists a special semi-martingale V (the value process) such that the process $J^{\mathbb{Q}}$ defined as

$$J_t^{\mathbb{Q}} = S_t^\delta V_t + \int_0^t S_s^\delta U_s ds + \int_0^t \delta_s S_s^\delta \ln Z_s^{\mathbb{Q}} ds + S_t^\delta \ln Z_t^{\mathbb{Q}} \qquad \text{for all } t \in [0,T]$$

is a $\mathbb{Q}$-submartingale for each $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_f^e$ and a martingale for a particular $\mathbb{Q}^*$, hence $\mathbb{Q}^*$ is an optimal probability measure (see [BMS] for details, in particular for the fact that $\mathcal{E}(L)$ is a true martingale).

We denote by $V = A^V + M^V$ the canonical decomposition of the special semi-martingale V. The local martingale M^V admits a decomposition $dM^V = dM^{V,c} + \sum_{i=1}^d v^i dN^i$ where $M^{V,c}$ is a continuous $\mathbb{P}$- martingale. Using integration by parts formula, we obtain after some simple computations and using (3.8) :

$$\begin{aligned} dJ_t^{\mathbb{Q}} &= S_t^\delta \Big((-\delta_t V_t + U_t)dt + (dV_t + d\ln Z_t^{\mathbb{Q}}) \Big) \\ &= S_t^\delta \Big[(-\delta_t V_t + U_t)dt + dM_t^{V,c} + dA_t^V + dL_t^{\mathbb{Q},c} - \frac{1}{2} d\langle L^{\mathbb{Q},c} \rangle_t \\ &\quad + \sum_{i=1}^d (v_t^i + \ln(1+\ell_t^i))dN_t^i + \sum_{i=1}^d (\ln(1+\ell_t^i) - \ell_t^i)\lambda_t^i dt \Big] \end{aligned}$$

From Girsanov's theorem, the processes $(N_t^i)_{t\geq 0}$ and $(\widetilde{M}_t^c)_{t\geq 0}$ defined as :

$$\begin{aligned} d\widetilde{N}_t^i &= dN_t^i - \ell_t^i \lambda_t^i dt \\ d\widetilde{M}_t^c &= d(M_t^{V,c} + L_t^{\mathbb{Q},c}) - d\langle M^{V,c} + L^{\mathbb{Q},c}, L^{\mathbb{Q},c} \rangle_t \end{aligned}$$

are $\mathbb{Q}$-local martingales, hence :

$$\begin{aligned} dJ_t^{\mathbb{Q}} &= S_t^\delta \Big[(-\delta_t V_t + U_t)dt + d\widetilde{M}_t^c + dA_t^V + d\langle M^{V,c} + L^{\mathbb{Q},c}, L^{\mathbb{Q},c} \rangle_t - \frac{1}{2} d\langle L^{\mathbb{Q},c} \rangle_t \\ &\quad + \sum_{i=1}^d (v_t^i + \ln(1+\ell_t^i))d\widetilde{N}_t^i + \sum_{i=1}^d \left(\ell_t^i (v_t^i - 1) + (1+\ell_t^i)\ln(1+\ell_t^i) \right) \lambda_t^i dt \Big]. \end{aligned}$$

In order that the process $J^{\mathbb{Q}}$ is a $\mathbb{Q}$-submartingale for each $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_f^e$, we impose that its finite variation part is a non-decreasing process.

$$\begin{aligned} A_t^V &= -\operatorname{ess\,inf}_{\mathcal{Q}_f^e} \int_0^t (U_s - \delta_s V_s)ds + \langle M^{V,c} + L^{\mathbb{Q},c}, L^{\mathbb{Q},c} \rangle_t - \frac{1}{2} \langle L^{\mathbb{Q},c} \rangle_t \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \int_0^t \left(\ell_s^i (v_s^i - 1) + (1+\ell_s^i)\ln(1+\ell_s^i) \right) \lambda_s^i ds. \end{aligned} \tag{3.9}$$

To find the $ess \inf$, we divide (3.9) in two parts, the continuous part and the discontinuous part ; hence we have two optimization problems :

$$\begin{aligned} A_t^V &= \int_0^t (\delta_s V_s - U_s) ds - \operatorname*{ess\,inf}_{\mathcal{Q}_f^e} \{ \langle M^{V,c}, L^{\mathbb{Q},c} \rangle_t + \frac{1}{2} \langle L^{\mathbb{Q},c} \rangle_t \} \\ &- \operatorname*{ess\,inf}_{\mathcal{Q}_f^e} \sum_{i=1}^d \int_0^t \left(\ell_s^i (v_s^i - 1) + (1 + \ell_s^i) \ln(1 + \ell_s^i) \right) \lambda_s^i ds. \end{aligned}$$

In [BMS], it is proved that the first infimum is obtained for $L^{\mathbb{Q},c} = -M^{V,c}$ and

$$-\operatorname*{ess\,inf}_{\mathcal{Q}_f^e} \{ \langle M^{V,c}, L^{\mathbb{Q},c} \rangle + \frac{1}{2} \langle L^{\mathbb{Q},c} \rangle \} = \frac{1}{2} \langle M^{V,c} \rangle .$$

The second part of the optimisation problem reduces to find the optimal ℓ^i, solution of :

$$\operatorname{ess\,inf} \left(\ell_s^i (v_s^i - 1) + (1 + \ell_s^i) \ln(1 + \ell_s^i) \right)$$

which is an easy task, the solution being $\ell_s^{*,i} = e^{-v_s^i} - 1$, which leads to

$$-\operatorname{ess\,inf} \left(\ell_s^i (v_s^i - 1) + (1 + \ell_s^i) \ln(1 + \ell_s^i) \right) = e^{-v_s^i} + v_s^i - 1 = g(v_s^i)$$

where $g(x) = e^{-x} + x - 1$. Therefore,

$$A_t^V = \int_0^t (\delta_s V_s - U_s) ds + \frac{1}{2} \langle M^{V,c} \rangle_t + \int_0^t \sum_{i=1}^d g(v_s^i) \lambda_s^i ds .$$

It follows that $(V, M^{V,c}, v)$ is a solution of

$$\begin{cases} dV_t = (\delta_t V_t - U_t + j_t(-v_t))\, dt + \frac{1}{2} d\langle M^{V,c} \rangle_t + dM_t^{V,c} + \sum_{i=1}^d v_t^i dN_t^i \\ V_T = \bar{U}_T \end{cases}$$

hence, the optimal probability measure $\mathbb{Q}^*$ is characterized by its Radon-Nikodym density

$$dZ_t^{\mathbb{Q}^*} = Z_{t^-}^{\mathbb{Q}^*} dL_t, \qquad dL_t = -dM_t^{V,c} + \sum_{i=1}^d \left(e^{-v_t^i} - 1 \right) dN_t^i$$

The value process V is a solution of (3.4), then the solution exists.

Step 2 : We now study the uniqueness of the BSDE solution. Assume that $(Y, M^{Y,c}, y)$ and $(\bar{Y}, M^{\bar{Y},c}, \bar{y})$ are two solutions of (3.4) in $D_0^{\exp} \times \mathcal{M}^p(\mathbb{P}) \times \mathcal{L}^2(\lambda, \mathbb{P})$. Suppose that, for some

$t \in [0,T]$, the set $A = \{Y_t > \bar{Y}_t\} \in \mathcal{F}_t$ satisfies $\mathbb{P}(A) > 0$ and define $\tau = \inf\{s \geq t | \bar{Y}_s \geq Y_s\}$, so that $\bar{Y}_\tau \geq Y_\tau$. Since $Y_T = \bar{Y}_T$, one has $\tau \leq T$, and :

$$\int_t^\tau (\delta_s Y_s - U_s)ds - Y_\tau > \int_t^\tau (\delta_s \bar{Y}_s - U_s)ds - \bar{Y}_\tau \qquad \text{on } A$$

Then, from Proposition 18, it follows that :

$$\exp(-Y_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_t^\tau \delta_s Y_s - U_s)ds - Y_t\right)\Big|\mathcal{G}_t\right] > \exp\left(-\bar{Y}_t\right) \qquad \text{on } A$$

which implies that $Y_t < \bar{Y}_t$ on A in contradiction with the definition of A; therefore Y and $\bar{Y}$ are indistinguishable.

Step 3 : In this step we prove that the solution $(Y, M^{Y,c}, y)$ of the BSDE (3.4) belongs to the required spaces.

- As in [BMS], the recursive property implies that $Y \in D_0^{exp}$.
- We now study the process $M^{Y,c}$. Let us consider the $\mathbb{P}$-martingale :

$$K_t := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_0^T (\delta_s Y_s - U_s)ds - \bar{U}_T\right)\Big|\mathcal{G}_t\right]$$

Using the fact that $Y \in D_0^{exp}$, we obtain that the process K belongs to $\mathcal{M}^p(\mathbb{P})$. Now, the recursive property leads to

$$K_t = \exp\left(-Y_t + \int_0^t (\delta_s Y_s - U_s)ds\right)$$

and it is not difficult to show that, from Itô's formula and the canonical decomposition of Y,

$$dM_t^{Y,c} = -\frac{dK_t^c}{K_{t-}}\,. \tag{3.10}$$

From Assumption 3, there exists k^i and $M^{K,c}$ such that the martingale K equals

$$K_t = K_0 + M_t^{K,c} + \sum_{i=1}^d \int_0^t k_s^i dN_s^i$$

Hence, from (3.10)

$$\langle M^{Y,c}\rangle_T \leq \int_0^T \frac{1}{K_t^2} d\langle K^c\rangle_t \leq \langle K^c\rangle_T \sup_{0\leq t\leq T}\frac{1}{K_t^2} \leq \langle K^c\rangle_T \exp\left(2\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|(1+||\delta||_\infty T) + 2\int_0^T |U_s|ds\right)$$

By BDG's inequalities, there exists a constant C such that for every $p \in [1, +\infty)$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\langle K^c\rangle_T + \int_0^T (k_t^i)^2 dH_t^i\right]^{\frac{p}{2}} \leq C\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\sup_{0\leq t\leq T} |K_t|^p) \tag{3.11}$$

Since $K \in \mathcal{M}^p(\mathbb{P})$, we conclude that $M^{Y,c}$ lies in the space $\mathcal{M}_0^p(\mathbb{P})$ for every $p \in [1, +\infty)$. We conclude, using again BDG's inequalities.

• Space of y : Using the recursive relation and the decomposition of the process K we get :

$$\ln(K_{t^-} + k_t^i) - \ln(K_{t^-}) = -y_t^i$$

hence,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T (e^{-y_t^i} - 1)^2 dH_t^i\right]^{\frac{p}{2}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \left(\frac{k_t^i}{K_{t^-}}\right)^2 dH_t^i\right]^{\frac{p}{2}} \leq \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T} \frac{1}{K_t^p}\right)\left(\int_0^T (k_t^i)^2 dH_t^i\right)^{\frac{p}{2}}\right]$$

Since $\sup_{0\leq t\leq T}\left(\frac{1}{K_t}\right) \in \mathbf{L}^p(\mathbb{P})$ for any $p \in [1, +\infty]$, using (3.11) and Cauchy inequalities, we conclude :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T (e^{-y_t^i} - 1)^2 dH_t^i\right]^{\frac{p}{2}} < \infty. \tag{3.12}$$

In particular

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T (e^{-y_t^i} - 1)^2 \lambda_t^i dt\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \left(\frac{k_t^i}{K_{t^-}}\right)^2 dH_t^i\right] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T} \frac{1}{K_t^2}\right)\int_0^T (k_t^i)^2 dH_t^i\right] < \infty\,. \tag{3.13}$$

By using similar arguments, one prove that :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T (e^{y_t^i} - 1)^2 \lambda_t^i dt\right] < \infty. \tag{3.14}$$

Moreover, by using the inequality

$$|y|^2 \leq 2\big(|e^{-y} - 1|^2 + |e^y - 1|^2\big), \;\; \forall y \in \mathbb{R}$$

and (3.13)-(3.14) we conclude that the process y is in $\mathcal{L}^2(\lambda, \mathbb{P})$.

It remains to prove that the martingale part of the BSDE solution, i.e.,

$$M = -M^{Y,c} + \sum_{i=1}^d \int_0^{\cdot} (e^{-y_t^i} - 1) dN_t^i$$

belongs to $\mathcal{M}_0^p(\mathbb{P})$ for any $p \in [1, +\infty)$.

Since $M^{Y,c} \in \mathcal{M}_0^p(\mathbb{P})$, and (3.12)

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\langle M^{Y,c}\rangle_T + \sum_{i=1}^{d}\int_0^T (e^{-y_t^i} - 1)^2 dH_t^i\right]^{\frac{p}{2}} < \infty,$$

and using BDG inequality, we obtain

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|^p\right) < \infty.$$

□

3.3.2 Comparison theorem and properties of the value process

In this part, we establish a comparison theorem and we study the properties of the value process for a given pair $(U, \bar{U}_T)$.

Definition 17. *For two random variables X and Y, we write $X \leq Y$ for $X \leq Y$ a.s. For two processes A and B, we write $A \leq B$ for $A_t \leq B_t, \forall t \in [0, T], a.s.$. We write $(X, A) \leq (Y, B)$ if $X \leq Y$ and $A \leq B$.*

Theorem 10. *Assume that for $k = 1, 2$, $(Y^k, M^{k,c}, y^k)$ is the solution of the BSDE (3.4) associated with $(U^k, \bar{U}_T^k)$. We denote $Y^{12} := Y^1 - Y^2$, $\widetilde{U}^{12} := U^1 - U^2$ and $\bar{U}_T^{12} := \bar{U}_T^1 - \bar{U}_T^2$. Then,*

$$S_t^\delta Y_t^{12} \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,2}}\left[\int_t^T S_s^\delta \widetilde{U}_s^{12} ds + S_T^\delta \bar{U}_T^{12}\Big|\mathcal{G}_t\right] \tag{3.15}$$

where $\mathbb{Q}^{*,2}$ is the solution of $\mathcal{P}(U^2, \bar{U}_T^2)$, i.e., the probability measure equivalent to $\mathbb{P}$ with Radon Nikodym density $Z^{\mathbb{Q}^{*,2}}$ given by

$$dZ_t^{\mathbb{Q}^{*,2}} = Z_{t^-}^{\mathbb{Q}^{*,2}}\left(-dM_t^{2,c} + \sum_{i=1}^{d}\left(e^{-y_t^{i,2}} - 1\right)dN_t^i\right). \tag{3.16}$$

In particular, if $(U^1, \bar{U}_T^1) \leq (U^2, \bar{U}_T^2)$, one obtains

$$Y_t^1 \leq Y_t^2, \quad dP \otimes dt\text{-a.e.}$$

Proof : We denote $y^{i,12} := y^{i,1} - y^{i,2}$ and $M^{12,c} = M^{1,c} - M^{2,c}$. Then :

$$\begin{aligned} Y_t^{12} &= \bar{U}_T^{12} + \int_t^T \left(\widetilde{U}_s^{12} - \delta_s Y_s^{12}\right) ds - \sum_{i=1}^d \int_t^T y_s^{i,12} dN_s^i - \sum_{i=1}^d \int_t^T \left[g(y_s^{i,1}) - g(y_s^{i,2})\right] \lambda_s^i ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_t^T \left(d\langle M^{2,c}\rangle_s - d\langle M^{1,c}\rangle_s\right) - \int_t^T dM_s^{12,c} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Note that, since $M^{k,c}$ are continuous martingales,

$$-\langle M^{2,c}, M^{12,c}\rangle - \frac{1}{2}\langle M^{2,c}\rangle + \frac{1}{2}\langle M^{1,c}\rangle = \frac{1}{2}\langle M^{12,c}\rangle \tag{3.18}$$

Using the fact that the process $\langle M^{12,c}\rangle$ is increasing and that the function g is convex we get :

$$\begin{aligned} Y_t^{12} &\leq \bar{U}_T^{12} + \int_t^T \left(\widetilde{U}_s^{12} - \delta_s Y_s^{12}\right) ds + \sum_{i=1}^d \int_t^T (e^{-y_s^{i,2}} - 1) y_s^{i,12} \lambda_s^i ds + \int_t^T d\langle M^{2,c}, M^{12,c}\rangle_s \\ &\quad - \int_t^T dM_s^{12,c} - \sum_{i=1}^d \int_t^T y_s^{i,12} dN_s^i. \end{aligned}$$

Let N^* and $M^{*,c}$ be the $\mathbb{Q}^{*,2}$-martingales obtained by Girsanov's transformation from N and $M^{12,c}$, where $d\mathbb{Q}^{*,2} = Z^{\mathbb{Q}^{*,2}} d\mathbb{P}$ and where $Z^{\mathbb{Q}^{*,2}}$ is given by (3.16). Then,

$$Y_t^{12} \leq \bar{U}_T^{12} + \int_t^T \left(\widetilde{U}_s^{12} - \delta_s Y_s^{12}\right) ds - \sum_{i=1}^d \int_t^T y_s^{i,12} dN_s^{i*} - \int_t^T dM_s^{*,c}$$

which implies that

$$Y_t^{12} \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,2}}\Big[\int_t^T e^{-\int_t^s \delta_r dr} \widetilde{U}_s^{12} ds + e^{-\int_t^T \delta_r dr} \bar{U}_T^{12} \Big| \mathcal{G}_t\Big]$$

In particular, if $(U^1, \bar{U}_T^1) \leq (U^2, \bar{U}_T^2)$, then $Y_t^1 \leq Y_t^2$ $d\mathbb{P} \otimes dt$-*a.e.*. □

We have also the following standard a priori estimates.

Proposition 19. *Let $(Y^k, M^{k,c}, y^k)$ be the solution associated with $(U^k, \bar{U}_T^k)$ for $k = 1, 2$ where we assume that $(U^1, \bar{U}_T^1) \leq (U^2, \bar{U}_T^2)$. Then there exists a constant $C > 0$ such that :*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,2}}\Big[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^{12}|^2 + \langle M^{12,c}\rangle_T + \sum_{i=1}^d \int_0^T |y_t^{i,12}|^2 \lambda_t^{i,*} dt\Big] \leq C\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,2}}\Big[|\bar{U}_T^{12}|^2 + \int_0^T |U_t^{12}|^2 dt\Big] \tag{3.19}$$

where $\lambda^{i,*}$ is the intensity process of H^i under the probability $\mathbb{Q}^{*,2}$.

In the case $(U^2, \bar{U}_T^2) \leq (U^1, \bar{U}_T^1)$, the same inequality holds with $\mathbb{Q}^{*,1}$.

Proof : Using Itô's formula :

$$\begin{aligned} d(Y_t^{12})^2 &= 2Y_t^{12}\left[\left(\delta_t Y_t^{12} - \widetilde{U}_t^{12}\right)dt + \frac{1}{2}d\langle M^{1,c}\rangle_t - \frac{1}{2}d\langle M^{2,c}\rangle_t\right] + d\langle M^{12,c}\rangle_t \\ &+ 2Y_t^{12}\left[\sum_{i=1}^d \left(g(y_t^{i,1}) - g(y_t^{i,2})\right)\lambda_t^i\right]dt + \sum_{i=1}^d (y_t^{i,12})^2\lambda_t^i dt + d\mathrm{mart}_t \end{aligned}$$

where $d\mathrm{mart}_t = 2Y_{t-}^{12}\left[dM_t^{12,c} + \sum_{i=1}^d y_t^{i,12}dN_t^i\right] + \sum_{i=1}^d \left(y_t^{i,12}\right)^2 dN_t^i$ corresponds to a martingale.

Assuming $(U^1, \bar{U}_T^1) \le (U^2, \bar{U}_T^2)$, it follows from the comparison Theorem 10 that $Y^1 \le Y^2$. Using the relation (3.18) and the convexity property of the function g, we get :

$$\begin{aligned} (Y_t^{12})^2 &+ \int_t^T d\langle M^{12,c}\rangle_s \le (\bar{U}_T^{12})^2 + 2\int_t^T Y_s^{12}\left[-\delta_s Y_s^{12} + \widetilde{U}_s^{12}\right]ds + 2\sum_{i=1}^d \int_t^T Y_s^{12}\,(e^{-y_s^{i,2}} - 1)y_s^{i,12}\lambda_s^i ds \\ &- 2\int_t^T Y_s^{12}d\langle M^{1,c}, M^{2,c}\rangle_s + \int_t^T Y_s^{12}d\langle M^{2,c}\rangle_s - \sum_{i=1}^d \int_t^T \left(y_s^{i,12}\right)^2\lambda_s^i ds + \int_t^T d\mathrm{mart}_s \end{aligned}$$

hence

$$(Y_t^{12})^2 + \int_t^T d\langle M^{12,c}\rangle_s \le (\bar{U}_T^{12})^2 + 2\int_t^T Y_s^{12}\left[-\delta_s Y_s^{12} + \widetilde{U}_s^{12}\right]ds - \sum_{i=1}^d \int_t^T \left(y_s^{i,12}\right)^2\lambda_s^{i*}ds + \int_t^T d\mathrm{mart}_s^* \tag{3.20}$$

where mart^* is a $\mathbb{Q}^{*,2}$ martingale and $\lambda_s^{i*} := \lambda_s^i e^{-y_s^{i,2}}$ is the intensity of H^i under $\mathbb{Q}^{*,2}$. From the obvious inequality

$$(Y_t^{12})^2 - \frac{1}{\delta_t}(\widetilde{U}_t^{12})Y_t^{12} \ge \frac{-1}{4\delta_t^2}(\widetilde{U}_t^{12})^2$$

and the non-negativity of δ, we deduce easily that

$$-Y_t^{12}\left(\delta_t Y_t^{12} - \widetilde{U}_t^{12}\right) \le \frac{1}{4\delta_t}(\widetilde{U}_t^{12})^2 \tag{3.21}$$

Plotting relation (3.21) in (3.20) and using the fact that the process δ is bounded below, there exists a constant $C > 0$ such that :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,2}}\left[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^{12}|^2 + \langle M^{12,c}\rangle_T + \sum_{i=1}^d \int_0^T |y_t^{12,i}|^2\lambda_t^{i,*}dt\right] \le C\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,2}}\left[|\bar{U}_T^{12}|^2 + \int_0^T |\widetilde{U}_t^{12}|^2 dt\right].$$

Permuting Y^1 and Y^2 and assuming $(U^1, \bar{U}_T^1) \ge (U^2, \bar{U}_T^2)$ leads to the kind of inequality.
□

Theorem 11. *(Concavity property) Define the map* $F : D_1^{\exp} \times L^{\exp} \longrightarrow D_0^{\exp}$ *as*

$$F(U, \bar{U}) = V$$

where $(V, M^{V,c}, v)$ *is the solution associated with* $(U, \bar{U})$*. Then* F *is concave, namely, for all* $\theta \in (0,1)$ *and* $(U^1, \bar{U}_T^1), (U^2, \bar{U}_T^2) \in D_1^{\exp} \times L^{\exp}$ *:*

$$F\left(\theta U^1 + (1-\theta)U^2, \theta \bar{U}_T^1 + (1-\theta)\bar{U}_T^2\right) \geq \theta F(U^1, \bar{U}_T^1) + (1-\theta)F(U^2, \bar{U}_T^2).$$

Proof : Let $(V^k, M^{k,c}, v^k)$ be the solution of BSDE (3.4) associated with $(U^k, \bar{U}_T^k) \in D_1^{\exp} \times L^{\exp}$. Then for any $\theta \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} d(\theta V_t^1 - (1-\theta)V_t^2) &= \left[\delta_t(\theta V_t^1 + (1-\theta)V_t^2) - (\theta U_t^1 + (1-\theta)U_t^2)\right] dt \\ &+ \theta d\langle M^{1,c}\rangle_t + (1-\theta) d\langle M^{2,c}\rangle_t + d\big(\theta M_t^{1,c} + (1-\theta)M_t^{2,c}\big) \\ &+ \sum_{i=1}^{d} \left[\theta v_t^{1,i} + (1-\theta)v_t^{2,i}\right] dN_t^i + \sum_{i=1}^{d} \left[\theta\, g(v_t^{1,i}) + (1-\theta)g(v_t^{2,i})\right] \lambda_t^i dt \end{aligned} \tag{3.22}$$

We recall the following general result : Let X and Y be two continuous martingales. Then, for all $\theta \in (0,1)$, $\theta\langle X\rangle + (1-\theta)\langle Y\rangle - \langle \theta X + (1-\theta)Y\rangle$ is an increasing process. Indeed, we have :

$$\begin{aligned} & \langle \theta X + (1-\theta)Y\rangle - \theta\langle X\rangle - (1-\theta)\langle Y\rangle \\ = \;& (\theta^2 - \theta)\langle X\rangle + \big((1-\theta)^2 - (1-\theta)\big)\langle Y\rangle + 2\theta(1-\theta)\langle X, Y\rangle \\ = \;& \theta(\theta-1)\big[\langle X\rangle + \langle Y\rangle - 2\langle X, Y\rangle\big] = \theta(\theta-1)\langle X - Y\rangle \end{aligned}$$

Therefore using the convexity property of the function g we get :

$$\begin{aligned} \theta V_t^1 + (1-\theta)V_t^2 \;\leq\; & \left(\theta \bar{U}_T^1 + (1-\theta)\bar{U}_T^2\right) - \int_t^T \left[\delta_s(\theta V_s^1 + (1-\theta)V_s^2) - (\theta U_s^1 + (1-\theta)U_s^2)\right] ds \\ & - \int_t^T d\langle \theta M^{1,c} + (1-\theta)M^{2,c}\rangle_s - \int_t^T d(\theta M_s^{1,c} + (1-\theta)M_s^{2,c}) \\ & - \sum_{i=1}^{d} \int_t^T (\theta v_s^{1,i} + (1-\theta)v_s^{1,i}) dN_s^i - \sum_{i=1}^{d} \int_t^T g(\theta v_s^{1,i} + (1-\theta)v_s^{2,i})\lambda_s^i ds \end{aligned} \tag{3.23}$$

Let $(V^\theta, M^{\theta,c}, v^\theta)$ be the solution of the BSDE associated with $\big(\theta U^1 + (1-\theta)U^2, \theta \bar{U}^1 + (1-\theta)\bar{U}^2\big)$ and set $M^{V,c,\theta} = \theta M^{1,c} + (1-\theta)M^{2,c}$ and for $i = 1, \cdots, d$, $\widehat{v}^{\theta,i} = \theta v^{1,i} + (1-\theta)v^{2,i}$.

Then, using (3.23) :

$$\begin{aligned}\theta V_t^1 &+ (1-\theta)V_t^2 - V_t^\theta \le \int_t^T \delta_s(V_s^\theta - (\theta V_s^1 + (1-\theta)V_s^2))\,ds - \int_t^T d\langle M^{V,c,\theta}\rangle_s + \int_t^T d\langle M^{\theta,c}\rangle_s \\ &- \int_t^T d(M_s^{V,c,\theta} - M_s^{\theta,c}) + \sum_{i=1}^d \int_t^T \big(g(v_s^{\theta,i}) - g(\widehat{v}_s^{\theta,i})\big)\lambda_s^i ds - \sum_{i=1}^d \int_t^T (\widehat{v}_s^{\theta,i} - v_s^{\theta,i})dN_s^i\end{aligned}$$

Using (3.18) and the convexity property of the function g we get :

$$\begin{aligned}\theta V_t^1 &+ (1-\theta)V_t^2 - V_t^\theta \le \int_t^T \Big[\delta_s(V_s^\theta - (\theta V_s^1 + (1-\theta)V_s^2)\Big]\,ds + \sum_{i=1}^d \int_t^T \Big(e^{-v_s^{\theta,i}} - 1\Big)(\widehat{v}_s^{\theta,i} - v_s^{\theta,i})\lambda_s^i ds \\ &- \int_t^T d(\langle M^{\theta,c}, M^{V,c,\theta}\rangle_s + \langle M^{\theta,c}\rangle_s) - \int_t^T d(M_s^{V,c,\theta} - M_s^{\theta,c}) - \sum_{i=1}^d \int_t^T (\widehat{v}_s^{\theta,i} - v_s^{\theta,i})dN_s^i \\ &\le \int_t^T \big[\delta_s(V_s^\theta - (\theta V_s^1 + (1-\theta)V_s^2)\big]\,ds - \sum_{i=1}^d \int_t^T (\widehat{v}_s^{\theta,i} - v_s^{\theta,i})\big(dN_s^i - (e^{-v_s^{\theta,i}} - 1)\lambda_s^i ds\big) \\ &- \int_t^T d\Big((M_s^{V,c,\theta} - M_s^{\theta,c}) + \langle M^{V,c,\theta} - M^{\theta,c}, M^{\theta,c}\rangle_s\Big).\end{aligned}$$

Let $\mathbb{Q}^{*,\theta}$ be the probability measure equivalent to $\mathbb{P}$ with Radon-Nikodym density

$$dZ_t^{\mathbb{Q}^{*,\theta}} = Z_{t^-}^{\mathbb{Q}^{*,\theta}}\left(-dM_t^{\theta,c} + \sum_{i=1}^d (e^{-v_t^{\theta,i}} - 1)dN_t^i\right).$$

Then, using integration by parts and Girsanov's theorem, taking $\mathbb{Q}^{*,\theta}$-conditional expectations, we have

$$S_t^\delta\left(\theta V_t^1 + (1-\theta)V_t^2 - V_t^\theta\right) \le 0$$

which gives the result. □

3.4 The second optimization problem

In this section, we assume that $U_s = U(c_s)$ and $\bar{U}_T = \bar{U}(\psi)$ where U and $\bar{U}$ are given functions, c is a non-negative $\mathbb{G}$-adapted process and ψ a $\mathcal{G}_T$-measurable non-negative random variable. We fix a probability $\widetilde{\mathbb{P}}$ equivalent to $\mathbb{P}$ with a Radon-Nikodym density $\widetilde{Z}$ with respect to $\mathbb{P}$ given by :

$$d\widetilde{Z}_t = \widetilde{Z}_{t-}(\theta_t dM_t^c + \sum_{i=1}^n (e^{-z_t^i} - 1)dN_t^i),\ \widetilde{Z}_0 = 1\ . \tag{3.24}$$

3.4.1 The optimal plan

Definition 18.

$\mathcal{A}(x)$ is the closed convex set of controls parameters $(c,\psi) \in \mathcal{H}^2([0,T]) \times \mathbf{L}^2(\Omega,\mathcal{G}_T)$ such that

$$\mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\Big[\int_0^T c_t dt + \psi\Big] \leq x\,,$$

and $(U(c),\bar{U}(\psi)) \in D_1^{\exp} \times L^{\exp}$ and $(\bar{c}U'(c),\bar{\psi}\bar{U}'(\psi)) \in D_1^{\exp} \times L^{exp}$ for any pair $(\bar{c},\bar{\psi}) \in \mathcal{H}^2([0,T]) \times \mathbf{L}^2(\Omega,\mathcal{G}_T)$, as well as the process $\exp(\gamma \int_0^{\cdot} |U(c_t)|dt)$ (respectively $\exp(\gamma \int_0^{\cdot} |c_t||U'(c_t)|dt)$) belongs to the class $[\mathbf{D}]$ (see Dellacherie and Meyer [18] for definition).

We study the following optimization problem :

$$\begin{aligned}
&\sup_{(c,\psi)\in\mathcal{A}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\int_0^T S_s^\delta U(c_s)ds + S_T^\delta \bar{U}(\psi)\right] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\int_0^T \delta_s S_s^\delta \ln Z_s^{\mathbb{Q}^*} ds + S_T^\delta \ln Z_T^{\mathbb{Q}^*}\right] \\
&= \sup_{(c,\psi)\in\mathcal{A}(x)} V_0^{x,\psi,c}
\end{aligned}$$

where V_0 is the value at initial time of the value process V, part of the solution $(V, M^{V,c}, v)$ of the BSDE (3.4), in the case $U_s = U(c_s)$ and $\bar{U}_T = \bar{U}(\psi)$. Here, $\mathbb{Q}^*$ is the optimal model measure for $\mathcal{P}(U(c),\bar{U}(\psi))$, and depends on c,ψ.
In a complete market setting, denoting by $\widetilde{\mathbb{P}}$ the unique risk neutral probability, the process c can be interpreted as a consumption and ψ as a terminal wealth.

Assumption A 5. *The utility functions U and $\bar{U}$ satisfy the usual conditions :*

i) Strictly increasing and concave.

ii) Continuous differentiable on the set $\{U > -\infty\}$ and $\{\bar{U} > -\infty\}$, respectively,

iii) $U'(\infty) := \lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$ and $\bar{U}'(\infty) := \lim_{x\to\infty} \bar{U}'(x) = 0$,

iv) $U'(0) := \lim_{x\to 0} U'(x) = +\infty$ and $U'(0) := \lim_{x\to 0} \bar{U}'(x) = +\infty$,

v) Asymptotic elasticity $AE(U) := \lim \sup_{x\to+\infty} \dfrac{xU'(x)}{U(x)} < 1$.

3.4.2 Properties of the value process

Proposition 20. *Define the map* $G : \mathcal{A}(x) \longrightarrow D_0^{\exp}$ *as* $G(c,\psi) = V$*, where* $(V, M^{V,c}, v)$ *is the solution of the BSDE* (3.4) *associated with* $(U(c), \bar{U}(\psi))$*. Then*

(i) G *is concave, i.e., for all* $\theta \in (0,1)$ *and* $(c^1,\psi^1),(c^2,\psi^2) \in \mathcal{A}(x)$ *:*

$$G\left(\theta c^1 + (1-\theta)c^2, \theta\psi^1 + (1-\theta)\psi^2\right) \geq \theta G(c^1,\psi^1) + (1-\theta)G(c^2,\psi^2).$$

(ii) Let $G_0(c,\psi)$ *be the value at initial time of* $G(c,\psi)$*, i.e.,* $G_0(c,\psi) = V_0$*. If* $(c^n,\psi^n) \in \mathcal{A}(x)$ *converges decreasingly to* $(c,\psi) \in \mathcal{A}(x)$*, then* $G_0(c^n,\psi^n)$ *converges decreasingly to* $G_0(c,\psi)$*. Moreover* G_0 *is upper continuous with respect to the control parameters.*

Proof : Let $(V^k, M^{k,c}, v^k)$ be the solution of the BSDE (3.4) associated with $(U(c^k), \bar{U}(\psi^k))$ for $k = 1,2$. For any $\theta \in (0,1)$, let

$(\widetilde{V}^\theta, \widetilde{M}^{\theta,c}, \widetilde{v}^\theta)$ be the solution of (3.4) associated with $(U(\theta c^1 + (1-\theta)c^2), \bar{U}(\theta\psi^1$
$+(1-\theta)\psi^2))$

$(V^\theta, M^{\theta,c}, v^\theta)$ be the solution of (3.4) associated with $\theta U(c^1) + (1-\theta)U(c^2), \theta\bar{U}(\psi^1)$
$+(1-\theta)\bar{U}(\psi^2))$

and set $\overline{V}^\theta = \theta V^1 + (1-\theta)V^2$. Then, by using both the concavity properties of $(U,\, \bar{U})$ and Theorem 10, we get $\widetilde{V}^\theta \geq V^\theta$. Moreover, as consequence of Theorem 11, we obtain $V^\theta \geq \overline{V}^\theta$, which gives the assertion (i).

Let us now consider (c^n,ψ^n) a decreasing sequence of control parameters in $\mathcal{A}(x)$ which converges to (c,ψ), $c^n \longrightarrow c$ a.s and $\psi^n \longrightarrow \psi$ a.s; then, by using inequality (3.15), and the fact that the functions U and $\bar{U}$ are non-decreasing, we get

$$|V_0^{c^n,\psi^n} - V_0^{c,\psi}| \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\int_0^T (U(c_s^n) - U(c_s))ds + (\bar{U}(\psi^n) - \bar{U}(\psi))\right] \tag{3.25}$$

where $\mathbb{Q}^*$ is the optimal density associated with $(U(c), \bar{U}(\psi))$. Thus, by using the convergence monotone theorem and the a priori estimate (3.19), V^{c^n,ψ^n} converges decreasingly to $V^{c,\psi}$.

Let $(c^n,\psi^n) \in \mathcal{A}(x)$ be a sequence of control parameters such that $c^n \longrightarrow c$ a.s and

$\psi^n \longrightarrow \psi$ a.s where $(c,\psi) \in \mathcal{A}(x)$ and denote $\widetilde{c}^n = \sup_{m\geq n} c^m$,$\widetilde{\psi}^n = \sup_{m\geq n} \psi^m$. Then, $\widetilde{c}^n \longrightarrow c$ a.s decreasingly and $\widetilde{\psi}^n \longrightarrow \psi$ a.s decreasingly. It follows that $V_0^{\widetilde{c}^n,\widetilde{\psi}^n}$ converges to $V^{c,\psi}$ decreasingly and therefore :

$$\limsup_n V_0^{c^n,\psi^n} \leq \lim_n V_0^{\widetilde{c}^n,\widetilde{\psi}^n} = V_0^{c,\psi}$$

Hence, G_0 is upper semicontinuous with respect to the control parameters.

□

Definition 19. *The pairs $(c^1,\psi^1),(c^2,\psi^2) \in \mathcal{A}(x)$ are comparable if either $(c^1,\psi^1) \geq (c^2,\psi^2)$ or $(c^1,\psi^1) \leq (c^2,\psi^2)$ with the order introduced in Definition 17.*

Proposition 21. *Assume that Assumption A. 5 holds and let $(c^1,\psi^1),(c^2,\psi^2)$ be two comparable plans in $\mathcal{A}(x)$. Then the function Ψ defined on $(0,1)$ and valued in $D_0^{\exp}$*

$$\Psi(\epsilon) = G(c^1 + \epsilon(c^2 - c^1), \psi^1 + \epsilon(\psi^2 - \psi^1))$$

is right continuous at 0.

Proof :

• Assume first that $(c^1,\psi^1) \leq (c^2,\psi^2)$. Let, for $\epsilon \in]0,1[$, $V^\epsilon = G(c^1+\epsilon(c^2-c^1), \psi^1+\epsilon(\psi^2-\psi^1))$ and $V = G(c^1,\psi^1)$. From Proposition 19 and the obvious inequalities $U(c^1+\epsilon(c^2-c^1)) \geq U(c^1)$ and $\bar{U}(\psi^1+\epsilon(\psi^2-\psi^1)) \geq \bar{U}(\psi^1)$, we obtain

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,2}}\Big(\sup_{0\leq t\leq T}|V_t - V_t^\epsilon|^2\Big) \leq C\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,2}}\Big[|\bar{U}(\psi^1+\epsilon(\psi^2-\psi^1)) - \bar{U}(\psi^1)|^2 + \int_0^T |U(c_s^1+\epsilon(c_s^2-c_s^1)) - U(c_s^1)|^2 ds\Big].$$

Using now the concavity properties of U and $\bar{U}$, we obtain

$$\begin{aligned} 0 &\leq U(c_t^1+\epsilon(c_t^2-c_t^1)) - U(c_t^1) \leq \epsilon U'(c_t^1)(c_t^2-c_t^1) \\ 0 &\leq \bar{U}(\psi^1+\epsilon(\psi^2-\psi^1)) - \bar{U}(\psi^1) \leq \epsilon\bar{U}'(\psi^1)(\psi^2-\psi^1). \end{aligned}$$

Thus, we have

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,2}}\Big(\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\frac{V_t - V_t^\epsilon}{\epsilon}\Big|^2\Big) \leq C\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,2}}\Big[(\bar{U}'(\psi^1))^2(\psi^2-\psi^1)^2 + \int_0^T (U'(c_s^1))^2(c_s^2-c_s^1)^2 ds\Big].$$

• Assume now that $(c^1,\psi^1)\geq(c^2,\psi^2)$. Then, using the fact that G is concave with respect to the control parameters, one has

$$V^\epsilon\geq(1-\epsilon)V^1+\epsilon V^2$$

where V^k are associated with (c^k,ψ^k). Moreover, since $c^1+\epsilon(c^2-c^1)\leq c^1$ and $\psi^1+\epsilon(\psi^2-\psi^1)\leq\psi^1$, we have by Theorem 10 that

$$0\geq\frac{V^\epsilon-V^1}{\epsilon}\geq V^2-V^1.$$

Therefore :

$$\Big|\frac{V_t^\epsilon-V_t^1}{\epsilon}\Big|\leq|V_t^2-V_t^1|,\qquad t\in[0,T].$$

Using now Proposition 19, we get

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\Big(\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\frac{V_t^1-V_t^\epsilon}{\epsilon}\Big|^2\Big)\leq c\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\Big[(\bar{U}'(\psi^2))^2(\psi^2-\psi^1)^2+\int_0^T(U'(c_s^2))^2(c_s^2-c_s^1)^2ds\Big].$$

• Finally, we conclude there exists a constant $C>0$ such that :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\frac{V_t^1-V_t^\epsilon}{\epsilon}\Big|^2\Big]\leq C$$

where $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}^{*,1}$ if $(c^1,\psi^1)\geq(c^2,\psi^2)$ and $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}^{*,2}$ if $(c^1,\psi^1)\leq(c^2,\psi^2)$. Then, by Kolmogorov's criteria, we deduce that Ψ is right-continuous at 0. □

We now give a regularity result that will be useful in the next section. The proof is postponed to the Appendix

Theorem 12. *Let (c^1,ψ^1) and (c^2,ψ^2) be two comparable plans in $\mathcal{A}(x)$. Let*

$(V^\epsilon,M^{\epsilon,c},v^\epsilon)$ *the solution of* (3.4) *associated with* $(U(c^1+\epsilon(c^2-c^1)),\bar{U}(\psi^1+\epsilon(\psi^2-\psi^1)))$

$(V^1,M^{1,c},v^1)$ *the solution of* (3.4) *associated with* $(U(c^1),\bar{U}(\psi^1))$

Then, V^ϵ is right-differentiable with respect to ϵ at 0. Moreover, if we denote by $\partial_\epsilon V:=\lim_{\epsilon\to0}\frac{V^\epsilon-V^1}{\epsilon}$, then there exists $\partial_\epsilon\widetilde{M}^{V,c},\partial_\epsilon v\in\mathbf{L}^2(\mathbb{Q}^{1,*})\times\mathcal{L}^2(\widetilde{\lambda},\mathbb{Q}^{1,*})$ such that the triple $(\partial_\epsilon V,\partial_\epsilon\widetilde{M}^{V,c},\partial_\epsilon v)$ is the solution of the following BSDE :

$$\begin{cases} d\partial_\epsilon V_t=\big(\delta_t\partial_\epsilon V_t-U'(c_t^1)(c_t^2-c_t^1)\big)\,dt+d\partial_\epsilon\widetilde{M}_t^{V,c}+\displaystyle\sum_{i=1}^d\partial_\epsilon v_t^i d\widetilde{N}_t^i, \quad \mathbb{Q}^{*,1}\text{-}a.s. \\ \partial_\epsilon V_T=\bar{U}'(\psi^1)(\psi^2-\psi^1), \end{cases} \tag{3.26}$$

where $\widetilde{\lambda}^i := \lambda^i e^{-v^{1,i}}$ *and* $\widetilde{N}^i := N^i - \int_0^{\cdot}(e^{-v_t^{1,i}} - 1)\lambda_t^i dt$ *is a* $\mathbb{Q}^{1,*}$*-martingale.*

Moreover, we obtain

$$\partial_\epsilon V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{Z_T^{\mathbb{Q}^{*,1}}}{Z_t^{\mathbb{Q}^{*,1}}}\frac{S_T^\delta}{S_t^\delta}\bar{U}'(\psi^1)(\psi^2-\psi^1) + \int_t^T \frac{Z_s^{\mathbb{Q}^{*,1}}}{Z_t^{\mathbb{Q}^{*,1}}}\frac{S_s^\delta}{S_t^\delta}U'(c_s^1)(c_s^2-c_s^1)ds\Big|\mathcal{G}_t\right] \qquad \forall t\in[0,T]. \tag{3.27}$$

3.4.3 The optimization problem

In this section, we solve the following optimization problem : we associate with a pair $(c,\psi)\in\mathcal{A}(x)$ the quantity

$$X_0^{c,\psi} = \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}\left(\int_0^T c_s ds + \psi\right)$$

and we study

$$u(x) = \sup_{X_0^{c,\psi}\le x} V_0^{(c,\psi)}. \tag{3.28}$$

Here $V_0^{(c,\psi)} = V_0$, where $(V, M^{V,c}, v)$ is the solution of the BSDE (3.4) associated with $(U(c),\bar{U}(\psi))$. Note that, in a complete market setting with zero interest rate, when $\tilde{\mathbb{P}}$ is the unique equivalent martingale measure, X_0 is the initial wealth associated with the consumption c and terminal wealth ψ.

Proposition 22. *There exists an optimal pair* (c^0,ψ^0) *which solves (3.28).*

Proof : The uniqueness is a consequence of the strictly concavity property of V_0. We shall prove the existence by using Komlòs theorem.

First step : Let us first prove that $\sup_{(c,\psi)\in\mathcal{A}(x)} V_0^{c,\psi} < +\infty$. Because $\mathbb{P}\in\mathcal{Q}_f^e$, we have :

$$\sup_{(c,\psi)\in\mathcal{A}(x)} V_0^{c,\psi} \le \sup_{(c,\psi)\in\mathcal{A}(x)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\bar{U}(\psi) + \int_0^T U(c_s)ds\right] := \widetilde{u}(x)$$

Using the elasticity assumption on U and $\bar{U}$, we can find $\gamma\in(0,1)$ and $x_0\in\mathbb{R}$ such that, for any $\theta>1$, one has :

$$U(\theta x) < \theta^\gamma U(x) \qquad \forall x > x_0,$$

$$\bar{U}(\theta x) < \theta^\gamma \bar{U}(x) \qquad \forall x > x_0,$$

hence, for any $x > x_0$:

$$\widetilde{u}(\theta x) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\bar{U}(\theta\frac{\psi^{\theta x}}{\theta}) + \int_0^T U(\theta\frac{c_s^{\theta x}}{\theta})ds\Big] \leq \theta^{\gamma}\widetilde{u}(x).$$

Then, $AE(\widetilde{u}) < 1$, which permits to conclude that, for any $x > 0$, $\widetilde{u}(x) < +\infty$ (see [49] and [58] chap. 3, Lemma 3).

Second step : Let $(c^n, \psi^n) \in \mathcal{A}(x)$ be a maximizing sequence such that :

$$\nearrow \lim_{n\to+\infty} V_0^{c^n,\psi^n} = \sup_{(c,\psi)\in\mathcal{A}(x)} V_0^{c,\psi} < +\infty,$$

where the RHS is finite thanks to step 1. Using Komlòs criterion, we can find a convex combination $(\bar{c}^n, \bar{\psi}^n) \in conv\Big((c^n, \psi^n), (c^{n+1}, \psi^{n+1}), \cdots\Big)$ which converges $\mathbb{P}$-$a.s.$ We denote by (c^*, ψ^*) this limit, which belongs to $\mathcal{A}(x)$ since it is a closed convex set. Moreover, there exists $N_n \geq n$ and a positive sequence $(\theta^m)_{m\in\mathbb{N}}$ satisfying $\sum_{m=n}^{N_n}\theta^m = 1$ such that $(\bar{c}_n, \bar{\psi}_n) = (\sum_{m=n}^{N_n}\theta^m c^m, \sum_{m=n}^{N_n}\theta^m\psi^m)$. Therefore, by using the concavity and the increasing properties of the functional V_0 which respect to the control plan we get :

$$V_0^{\bar{c}^n,\bar{\psi}^n} = V_0^{\sum_{m=n}^{N_n}\theta^m c^m, \sum_{m=n}^{N_n}\theta^m\psi^m} \geq \sum_{m=n}^{N_n}\theta^m V_0^{c^m,\psi^m} \geq V_0^{c^n,\psi^n}.$$

Moreover, using the upper semi-continuous property of the functional V_0 which respect to the control plan we get :

$$\sup_{(c,\psi)\in\mathcal{A}(x)} V_0^{c,\psi} = \limsup_n V_0^{c^n,\psi^n} \leq \limsup_n V_0^{\bar{c}^n,\bar{\psi}^n} = V_0^{c^*,\psi^*}.$$

□

In order to characterize the optimal solution, we recall the classical convex analysis result.

Proposition 23. *There exists a constant $\nu^* > 0$ such that :*

$$u(x) = \sup_{(c,\psi)}\Big\{V_0^{(c,\psi)} + \nu^*\Big(x - X_0^{(c,\psi)}\Big)\Big\} \tag{3.29}$$

and if the maximum is attained in (3.28) by (c^*, ψ^*), then it is attained in (3.29) *by (c^*, ψ^*) with $X_0^{(c^*,\psi^*)} = x$. Conversely, if there exists $\nu^0 > 0$ and (c^0, ψ^0) such that the maximum* *is attained in*

$$\sup_{(c,\psi)} \left\{ V_0^{(c,\psi)} + \nu^0 \left(x - X_0^{(c,\psi)} \right) \right\}$$

with $X_0^{(c^0,\psi^0)} = x$, *then the maximum is attained in (3.29) by* (c^0, ψ^0).

Let $\nu > 0$ be fixed and L be the map given by $L(c,\psi) = V_0^{(c,\psi)} - \nu X_0^{(c,\psi)}$. We now study the following optimization problem :

$$\sup_{(c,\psi)} L(c,\psi)\,. \tag{3.30}$$

Proposition 24. *The optimal plan* (c^0, ψ^0) *which solves (3.30) satisfies the following (implicit) equations :*

$$U'(c_t^0) = \frac{Z_t^{\widetilde{\mathbb{P}}}}{Z_t^0} \frac{\nu}{S_t^\delta} \quad dt \otimes d\mathbb{P} \ a.s \ , \qquad \bar{U}'(\psi^0) = \frac{Z_T^{\widetilde{\mathbb{P}}}}{Z_T^0} \frac{\nu}{S_T^\delta},\ d\mathbb{P} \ a.s \tag{3.31}$$

where Z^0 *is the Radon-Nikodym density of the probability measure* $\mathbb{Q}^0$ *associated with the optimal plan* (c^0, ψ^0).

Proof : Consider the optimal plan (c^0, ψ^0) which solves (3.30) and another plan (c, ψ). For $\epsilon \in (0,1)$, one has :

$$L(c^0 + \epsilon(c - c^0), \psi^0 + \epsilon(\psi - \psi^0)) \leq L(c^0, \psi^0)$$

Then

$$\frac{1}{\epsilon}\left(V_0^{(c^0+\epsilon(c-c^0),\psi^0+\epsilon(\psi-\psi^0))} - V_0^{(c^0,\psi^0)} \right) - \nu \frac{1}{\epsilon}\left(X_0^{(c^0+\epsilon(c-c^0),\psi^0+\epsilon(\psi-\psi^0)} - X_0^{(c^0,\psi^0)} \right) \leq 0 \tag{3.32}$$

From the definition, we obtain that

$$\partial_\epsilon X_0^{(c^0,\psi^0)} := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} (X_0^{(c^0+\epsilon(c-c^0),\psi^0+\epsilon(c-c^0))} - X_0^{(c^0,\psi^0)}) = \mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}} \left[\int_0^T (c_s - c_s^0) ds + (\psi - \psi^0) \right] .$$

Taking the limit when ϵ goes to 0 in (3.32), we obtain :

$$\partial_\epsilon V_0^{(c^0,\psi^0)} - \nu \partial_\epsilon X_0^{(c^0,\psi^0)} \leq 0 \tag{3.33}$$

where $\partial_\epsilon V^{(c^0,\psi^0)}$ exists and is given explicitly by Theorem 12. From the explicit expression of $\partial_\epsilon X^{(c^0,\psi^0)}$ we get :

$$\begin{aligned}\partial_\epsilon V_0^{(c^0,\psi^0)} - \nu\partial_\epsilon X_0^{(c^0,\psi^0)} &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[S_T^\delta Z_T^0 \bar{U}'(\psi^0)(\psi-\psi^0) + \int_0^T S_s^\delta Z_s^0 U'(c_s^0)(c_s - c_s^0)ds\right] \\ &- \nu\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Z_T^{\widetilde{\mathbb{P}}}(\psi-\psi^0) + \int_0^T Z_s^{\widetilde{\mathbb{P}}}(c_s - c_s^0)ds\right]\end{aligned}$$

It follows from equality (3.33) that

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(S_T^\delta Z_T^0 \bar{U}'(\psi^0) - \nu Z^{\widetilde{\mathbb{P}}}\right)(\psi-\psi^0) + \int_0^T \left(S_s^\delta Z_s^0 U'(c_s^0) - \nu Z_s^{\widetilde{\mathbb{P}}}\right)(c_s - c_s^0)ds\right] \le 0$$

The rest of the proof is the same as in El Karoui et al. [25] (proof of Theorem 4.2, p. 677). In particular, for any ψ, $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(S_T^\delta Z_T^0 \bar{U}'(\psi^0) - \nu Z_T^{\widetilde{\mathbb{P}}}\right)(\psi-\psi^0)\right] \le 0$, hence

$$S_T^\delta Z_T^0 \bar{U}'(\psi^0) - \nu Z_T^{\widetilde{\mathbb{P}}} = 0 \qquad a.s$$

We find the optimal c with similar arguments. $\square$

Theorem 13. *Let I and $\bar{I}$ be the inverse of the functions U' and $\bar{U}'$. The optimal plan (c^0,ψ^0) which solve the problem (3.29) is given by :*

$$c_t^0 = I\left(\frac{\nu^0}{S_t^\delta}\frac{Z_t^{\widetilde{\mathbb{P}}}}{Z_t^0}\right) \qquad dt\otimes d\mathbb{P}\ a.s\ , \qquad \psi^0 = \bar{I}\left(\frac{\nu^0}{S_T^\delta}\frac{Z_T^{\widetilde{\mathbb{P}}}}{Z_T^0}\right)\ a.s.\ .$$

where $\nu^0 > 0$ satisfies :

$$\mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T I\left(\frac{\nu^0}{S_t^\delta}\frac{Z_t^{\widetilde{\mathbb{P}}}}{Z_t^0}\right)dt + \bar{I}\left(\frac{\nu^0}{S_T^\delta}\frac{Z_T^{\widetilde{\mathbb{P}}}}{Z_T^0}\right)\right] = x.$$

Proof : Define the map : $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ as

$$f(\nu) = \mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T I\left(\frac{\nu}{S_t^\delta}\frac{Z_t^{\widetilde{\mathbb{P}}}}{Z_t^0}\right)dt + \bar{I}\left(\frac{\nu}{S_T^\delta}\frac{Z_T^{\widetilde{\mathbb{P}}}}{Z_T^0}\right)\right].$$

Then, using assumption A.5, f is monotone and satisfies $\lim_{\nu\to 0} f(\nu) = +\infty$ and $\lim_{\nu\to+\infty} f(\nu) = 0$. For any initial wealth $x \in (0,+\infty)$, there exists a unique ν^0 such that $f(\nu^0) = x$.

Let $(c,\psi) \in \mathcal{A}(x)$ and $(V^{(c,\psi)}, M^{V,c}, v)$ $\left(\text{resp.}\,(V^{(c^0,\psi^0)}, M^{V^0,c}, v^0)\right)$ the solution of the

BSDE (3.4) associated with $(U(c^0), \bar{U}(\psi^0))$ $\big($resp. $(U(c), \bar{U}(\psi))\big)$ then from the inequality (3.15) (see the comparison theorem), we get :

$$\begin{aligned} V_0^{(c,\psi)} - V_0^{(c^0,\psi^0)} &\leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0}\left[S_T^\delta\left(\bar{U}(\psi) - \bar{U}(\psi^0)\right) + \int_0^T S_s^\delta\left(U(c_s) - U(c_s^0)\right)ds\right] \\ &\leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0}\left[S_T^\delta \bar{U}'(\psi^0)(\psi - \psi^0) + \int_0^T S_s^\delta U'(c_s^0)(c_s - c_s^0)ds\right]. \end{aligned}$$

It follows that :

$$\begin{aligned} V_0^{(c,\psi)} - V_0^{(c^0,\psi^0)} &\leq \nu^0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0}\left(\frac{Z_T^{\widetilde{\mathbb{P}}}}{Z_T^0}(\psi - \psi^0) + \int_0^T \frac{Z_s^{\widetilde{\mathbb{P}}}}{Z_s^0}(c_s - c_s^0)ds\right) \\ &\leq \nu^0\left(\mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\psi + \int_0^T c_s ds\right) - \mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\psi^0 + \int_0^T c_s^0 ds\right)\right) \end{aligned}$$

Since $(c,\psi) \in \mathcal{A}(x)$, then $\mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left[\psi + \int_0^T c_s ds\right] \leq x$. Using that $\mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left[\psi^0 + \int_0^T c_s^0 ds\right] = x$, we conclude :

$$V_0^{(c,\psi)} \leq V_0^{(c^0,\psi^0)}.$$

$\square$

3.5 Logarithm Case

In this section, we assume that the process δ is deterministic and that $U(x) = \ln(x)$ and $\bar{U}(x) = 0$ (hence $I(x) = \frac{1}{x}$ for all $x \in (0, +\infty)$). We introduce, as in Theorem 13, the optimal process $c_t^* = I\left(\frac{\nu}{S_t^\delta}\frac{\widetilde{Z}_t}{Z_t^*}\right) = \frac{S_t^\delta}{\nu}\frac{Z_t^*}{\widetilde{Z}_t}$. Recall that the Radon-Nikodym density $\widetilde{Z}$, and the Radon-Nikodym density of the optimal probability measure Z^* (given in (3.7)) satisfy

$$d\widetilde{Z}_t = \widetilde{Z}_{t-}(\theta_t dM_t^c + \sum_{i=1}^n (e^{-z_t^i} - 1)dN_t^i),\ \widetilde{Z}_0 = 1 \tag{3.34}$$

$$dZ_t^* = Z_{t-}^*(-dM_t^{Y,c} + \sum_{i=1}^n (e^{-y_t^i} - 1)dN_t^i),\ Z_0^* = 1 \tag{3.35}$$

.

For any deterministic function α such that $\alpha(T) = 0$, V admits a decomposition as

$$V_t = \alpha(t)\ln(c_t^*) + \beta_t$$

where β is a process such that $\beta_T = 0$. Our goal is to characterize the process β. As in [?], we introduce $J_t = \frac{1}{1+\alpha(t)}\beta_t$ in order to obtain a simple BSDE. Note that, even if Z^* is implicit (the coefficients depend on the solution c^*), the BSDE for J is explicitly determined in terms of the given parameters λ^i and of the given probability $\widetilde{\mathbb{P}}$.

Proposition 25. *The value function V has the form*

$$V_t = \alpha(t)\ln(c_t^*) + (1+\alpha(t))J_t$$

where

$$\alpha(t) = -\int_t^T e^{\int_t^s \delta(u)du} ds$$

and $(J, \bar{M}^{J,c}, j)$ is the unique solution of the following Backward Stochastic Differential Equation, where $k(t) = -\frac{\alpha(t)}{1+\alpha(t)}$:

$$\begin{aligned} dJ_t &= \Big((1+\delta(t))(1+k(t))J_t - k(t)\delta(t)\Big)dt + d\bar{M}_t^{J,c} + \frac{1}{2}d\langle \bar{M}^{J,c}\rangle_t + \frac{1}{2}k(t)(1+k(t))\theta_t^2 d\langle M^c\rangle_t \\ &\quad + \sum_{i=1}^d j_t^i d\bar{N}_t^i + \sum_{i=1}^d \Big(g(j_t^i)\bar{\lambda}_t^i + \Big(k(t)(e^{-z_t^i}-1) + e^{k(t)z_t^i} - 1\Big)\lambda_t^i\Big)dt \qquad (3.36) \\ J_T &= 0 \end{aligned}$$

Here, the processes $\bar{M}^{J,c}$ and $d\bar{N}_t^i = dH_t^i - \bar{\lambda}_t^i dt$ are $\bar{\mathbb{P}}$-martingales where $d\bar{\mathbb{P}}|_{\mathcal{G}_t} = \bar{Z}_t d\mathbb{P}|_{\mathcal{G}_t}$ and $\bar{\lambda}_t^i = e^{k(t)z_t^i}\lambda_t^i$ where

$$d\bar{Z}_t = -\bar{Z}_{t^-}\left(k(t)\theta_t dM_t^c - \sum_{i=1}^d (e^{k(t)z_t^i} - 1)dN_t^i\right) \qquad (3.37)$$

Note that, in a complete market, one obtains a forward backward system for the pair J-optimal wealth.

Proof : Using the fact that V satisfies the BSDE (3.4) and the assumed form of V in terms of (α, β), one obtains

$$dV_t = (\delta(t)V_t - \ln(c_t^*))\,dt - d(\ln Z_t^*) = \alpha(t)d(\ln c_t^*) + (\ln c_t^*)\alpha'(t)dt + d\beta_t$$

Therefore

$$\begin{aligned} d\beta_t &= \delta(t)(V_t + \alpha(t))dt - (1+\alpha'(t))\ln(c_t^*)dt + \alpha(t)d\ln\widetilde{Z}_t + (\alpha(t)+1)d\ln Z_t^* \\ &= \Big(\big(\delta(t)\alpha(t) - 1 - \alpha'(t)\big)\ln c^*(t) + \delta(t)\beta_t + \alpha(t)\delta(t)\Big)dt + \alpha(t)d\ln\widetilde{Z}_t + (\alpha(t)+1)d\ln Z_t^* \end{aligned}$$

We choose α so that $\delta(t)\alpha(t) = 1 + \alpha'(t)$. It follows that

$$d\beta_t = \delta(t)(\beta_t + \alpha(t))dt + \alpha(t)d\ln \widetilde{Z}_t + (\alpha(t)+1)d\ln Z^*_t$$

After some obvious computations taking into account the form of $\widetilde{Z}$ and Z^*, one obtains

$$\begin{aligned} d\beta_t &= \delta(t)(\beta_t + \alpha(t))dt + \sum_{i=1}^{d}\Big((\alpha(t)+1)(e^{-y^i_t}-1) - \alpha(t)(e^{-z^i_t}-1)\Big)\lambda^i_t dt \\ &\quad + \alpha(t)\theta_t dM^c_t + (\alpha(t)+1)dM^{V,c}_t - \frac{1}{2}\Big(\alpha(t)\theta^2_t d\langle M^c\rangle_t - (\alpha(t)+1)d\langle M^{V,c}\rangle_t\Big) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{d}\Big((\alpha(t)+1)y^i_t - \alpha(t)z^i_t\Big)dH^i_t \end{aligned}$$

We now define $J = \frac{1}{1+\alpha(t)}\beta_t$ and set $k(t) = -\frac{\alpha(t)}{1+\alpha(t)}$. Then

$$\begin{aligned} dJ_t &= \left(\frac{1+\delta(t)}{1+\alpha(t)}J_t - \delta(t)k(t)\right)dt + \sum_{i=1}^{d}\Big(g(y^i_t) + k(t)g(z^i_t)\Big)\lambda^i_t dt \\ &\quad + dM^{V,c}_t - k(t)\theta_t dM^c_t + \frac{1}{2}\Big(k(t)\theta^2_t d\langle M^c\rangle_t + d\langle M^{V,c}\rangle_t\Big) + \sum_{i=1}^{d}\Big(y^i_t + k(t)z^i_t\Big)dN^i_t \end{aligned}$$

We introduce the martingale $M^{J,c}$ as $dM^{J,c}_t = dM^{Y,c}_t - k(t)\theta_t dM^c_t$. It is easy to check that

$$d\langle M^{J,c}\rangle_t = d\langle M^{Y,c}\rangle_t - k^2(t)\theta^2_t d\langle M^c\rangle_t - 2k(t)\theta_t d\langle M^{J,c}, M^c\rangle_t$$

and we denote $j^i_t = y^i_t + k(t)z^i_t$. Using the fact that, due to the form of g, for any x, k, z, λ,

$$xdN + \lambda(g(x-kz)+kg(z))dt = x(dN - (e^{kz}-1)\lambda dt) + \Big(g(x)e^{kz} + (e^{-z}-1)k + e^{kz} - 1\Big)\lambda dt$$

one obtains

$$\begin{aligned} dJ_t &= \Big((1+\delta(t))(1+k(t))J_t - \delta(t)k(t)\Big)dt + \sum_{i=1}^{d}\Big(g(j^i_t)e^{k(t)z^i_t} + k(t)(e^{-z^i_t}-1) + e^{k(t)z^i_t} - 1\Big)\lambda^i_t dt \\ &\quad + dM^{J,c}_t + \frac{1}{2}d\langle M^{J,c}\rangle_t + k(t)\theta_t d\langle M^{J,c}, M^c\rangle_t + \frac{1}{2}k(t)(k(t)+1)\theta^2_t d\langle M^c\rangle_t \\ &\quad + \sum_{i=1}^{d} j^i_t(dN^i_t - (e^{kz^i_t}-1)\lambda^i_t dt) \end{aligned}$$

We define $\bar{\mathbb{P}}$ as $d\bar{\mathbb{P}} = \bar{Z}d\mathbb{P}$, where

$$d\bar{Z}_t = -\bar{Z}_{t-}\left(k(t)\theta_t dM^c_t - \sum_{i=1}^{d}(e^{k(t)z^i_t}-1)dN^i_t\right)$$

The processes $\bar{M}^{J,c}$ and $\bar{N}^i$ defined as

$$\begin{aligned} d\bar{M}^{J,c}_t &= dM^{J,c}_t + k(t)\theta_t d\langle M^{J,c}, M^c\rangle_t \\ d\bar{N}^i_t &= dN^i_t - (e^{k(t)z^i_t} - 1)\lambda^i_t dt = dH^i_t - \bar{\lambda}^i_t dt \end{aligned}$$

are $\bar{\mathbb{P}}$ martingales. The result follows.

3.6 Appendix

In this Appendix, we give the proof of Theorem 12. Let

$$\begin{array}{lll} (V^\epsilon, M^{\epsilon,c}, v^\epsilon) & \text{be the solution of (3.4) associated with} & (U(c^1+\epsilon(c^2-c^1)), \bar{U}(\psi^1+\epsilon(\psi^2-\psi^1))) \\ (V^1, M^{1,c}, v^1) & \text{be the solution of (3.4) associated with} & (U(c^1), \bar{U}(\psi^1) \end{array}$$

and denote

$$\begin{aligned} \Delta_\epsilon V &:= \frac{V^\epsilon - V^1}{\epsilon}, \qquad \Delta_\epsilon M^c := \frac{M^{\epsilon,c} - M^{1,c}}{\epsilon}, \qquad \Delta_\epsilon v^i := \frac{v^{\epsilon,i} - v^{1,i}}{\epsilon}, \\ \Delta_\epsilon U &:= \frac{U(c^1+\epsilon(c^2-c^1)) - U(c^1)}{\epsilon}, \qquad \Delta_\epsilon \bar{U}_T := \frac{\bar{U}(\psi^1+\epsilon(\psi^2-\psi^1)) - \bar{U}(\psi^1)}{\epsilon}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Then, $(\Delta_\epsilon V, \Delta_\epsilon M^c, \Delta_\epsilon v)$ satisfies the following equation :

$$\begin{aligned} \Delta_\epsilon V_t - \int_0^t (\delta_s \Delta_\epsilon V_s - \Delta_\epsilon U_s) ds = \frac{1}{2\epsilon}(\langle M^{\epsilon,c}\rangle_t - \langle M^{1,c}\rangle_t) + \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^d \int_0^t (g(v^{\epsilon,i}_s) - g(v^{1,i}_s))\lambda^i_s ds + \Delta_\epsilon M^c_t \\ + \sum_{i=1}^d \int_0^t \Delta_\epsilon v^i_s dN^i_s, \end{aligned} \tag{3.39}$$

with final condition $\Delta_\epsilon V_T = \Delta_\epsilon \bar{U}_T$.

We start first to give the following a priori estimates :

Lemma 4. *Assume the same conditions as in Theorem 12. Then, there exists a constant $C > 0$ such that : $\forall\, i = 1, \cdots, d, \forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, \epsilon > 0$,*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\sup_{0\le t\le T} |\Delta_\epsilon V_t|^2 + \left\langle \Delta_\epsilon \widetilde{M}^c \right\rangle_T + \sum_{i=1}^d \int_0^T \frac{|\Delta_\epsilon v^i_s|^p}{p!}\widetilde{\lambda}^i_s ds\right] \le C, \tag{3.40}$$

where $\Delta_\epsilon \widetilde{M}^c$ *is the* $\mathbb{Q}^{*,1}$ *martingale part of the* $\mathbb{Q}^{*,1}$ *semimartingale* $\Delta_\epsilon M^c$, *and* $\widetilde{\lambda}^i := \lambda^i e^{-v^{1,i}}$ *is the intensity process of the process* H^i *under the probability measure* $\mathbb{Q}^{*,1}$.

Proof : Let (c^1, ψ^1) and (c^2, ψ^2) be two comparable plans. We introduce the processes

$$\begin{aligned} K_t^\epsilon &:= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_0^T \left(\delta_s V_s^\epsilon - U(c_s^1 + \epsilon(c_s^2 - c_s^1))\right)ds - \bar{U}(\psi^1 + \epsilon(\psi^2 - \psi^1))\right) \Big| \mathcal{G}_t\right] \\ K_t^1 &:= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_0^T \left(\delta_s V_s^1 - U(c_s^1)\right)ds - \bar{U}(\psi^1)\right) \Big| \mathcal{G}_t\right]. \end{aligned}$$

Obviously, for all $t \in [0, T]$, one has :

$$\begin{aligned} V_t^\epsilon &= -\ln(K_t^\epsilon) + \int_0^t (\delta_s V_s^\epsilon - U(c_s^1 + \epsilon(c_s^2 - c_s^1))ds \\ V_t^1 &= -\ln(K_t^1) + \int_0^t (\delta_s V_s^1 - U(c_s^1))ds\,, \end{aligned}$$

hence,

$$\frac{V_t^\epsilon - V_t^1}{\epsilon} = -\ln\left[\left(\frac{K_t^\epsilon}{K_t^1}\right)^{\frac{1}{\epsilon}}\right] + \int_0^t \left[\delta_s \frac{1}{\epsilon}\left(V_s^\epsilon - V_s^1\right) - \frac{1}{\epsilon}\left(U(c_s^1 + \epsilon(c_s^2 - c_s^1)) - U(c_s^1)\right)\right] ds\,. \tag{3.41}$$

For $t \in [0, T]$, we define $\widetilde{K}_t^\epsilon := \dfrac{K^\epsilon}{K_t^1}$ and $\bar{K}_t^\epsilon = \left(\widetilde{K}_t^\epsilon\right)^{1/\epsilon}$. The processes $\bar{K}^\epsilon$ and $(\bar{K}^\epsilon)^{-1}$ are positive semi-martingales which belong to $\mathbf{L}^p(\mathbb{P})$ since :

$$(K_t^\epsilon)^{-1^p} = \exp\left(p\Delta_\epsilon V_t + \int_0^t p(\Delta_\epsilon U(c_s^1) - \delta_s \Delta_\epsilon V_s)ds\right).$$

In the other hand, by using the dynamics of K^ϵ and K^1 under the probability measure $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} dK_t^\epsilon &= K_{t-}^\epsilon\left(-dM_t^{\epsilon,c} + \sum_{i=1}^d \left(e^{-v_t^{\epsilon,i}} - 1\right)dN_t^i\right) \\ dK_t^1 &= K_{t-}^\epsilon\left(-dM_t^{1,c} + \sum_{i=1}^d \left(e^{-v_t^{1,i}} - 1\right)dN_t^i\right) \end{aligned}$$

and applying integration by parts formula, we get the dynamics of $\widetilde{K}^\epsilon$ given by :

$$d\widetilde{K}_t^\epsilon = \widetilde{K}_{t-}^\epsilon\left[-d\left(M_t^{\epsilon,c} - M_t^{1,c} - \langle M^{\epsilon,c} - M^{1,c}, M^{1,c}\rangle_t\right) + \sum_{i=1}^d \left(e^{-(v_t^{\epsilon,i} - v_t^{1,i})} - 1\right)\left[dH_t^i - e^{-v_t^{1,i}}\lambda_t^i dt\right]\right] \tag{3.42}$$

Clearly, $\widetilde{K^\epsilon}$ is $\mathbb{Q}^{*,1}$-local martingale. Then, the processes $\bar{K}^\epsilon$ and $(\bar{K}^\epsilon)^{-1}$ are positive $\mathbb{Q}^{*,1}$-submartingales. We now split the study into two cases.

First case : $(c^1,\psi^1)\le(c^2,\psi^2)$. Using the inequality (3.15), for all $t\in[0,T]$:

$$|\Delta_\epsilon V_t|\le\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\frac{S_T^\delta}{S_t^\delta}\bar{U}'(\psi^1)(\psi^2-\psi^1)+\int_t^T\frac{S_s^\delta}{S_t^\delta}U'(c_s^1)(c_s^2-c_s^1)ds\Big|\mathcal{G}_t\right]$$

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\frac{1}{\bar{K}_t^\epsilon}\right)^p\le\exp\left(p(||\delta||_\infty+1)\sup_{0\le t\le T}|\Delta_\epsilon V_t|+\int_0^T pU'(c_s^1)(c_s^2-c_s^1)ds\right).$$

Setting $\kappa=p(||\delta||_\infty+1)$, we obtain from (3.6),

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\frac{1}{\bar{K}_t^\epsilon}\right)^p\le\exp\left(\kappa\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}^{Q^{*,1}}\left(\bar{U}'(\psi^1)(\psi^2-\psi^1)+\int_t^T U'(c_s^1)(c_s^2-c_s^1)ds\Big|\mathcal{G}_t\right)+\int_0^T pU'(c_s^1)(c_s^2-c_s^1)\right).$$

Using Jensen inequality, we have :

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T}\left(\frac{1}{\bar{K}_t^\epsilon}\right)^p\quad&\le\quad\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\exp\left(\bar{U}'(\psi^1)(\psi^2-\psi^1)+\int_t^T U'(c_s^1)(c_s^2-c_s^1)ds\right)\Big|\mathcal{G}_t\right]^\kappa\\&\qquad\times\exp\Big(\int_0^T pU'(c_s^1)(c_s^2-c_s^1)ds\Big).\end{aligned}\tag{3.43}$$

Thanks to the assumption $(c^i,\psi^i)\in\mathcal{A}(x)$, we conclude that $\sup_{0\le t\le T}\left(\frac{1}{\bar{K}_t^\epsilon}\right)\in\mathbf{L}^p(\mathbb{P})$.

Second case : $(c^2,\psi^2)\ge(c^2,\psi^2)$. Then, using concavity property, we obtain for all $t\in[0,T]$:

$$\Big|\frac{V_t^\epsilon-V_t^1}{\epsilon}\Big|\le|V_t^1-V_t^2|,\quad|\Delta_\epsilon U(c_t^1)|\le U'(c_t^2)(c_t^1-c_t^2)$$

Now, using the same arguments as in the first step, we get that :

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T}\left(\frac{1}{\bar{K}_t^\epsilon}\right)^p&\le\sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}^{Q^{*,2}}\left[\exp\left(\bar{U}'(\psi^2)(\psi^1-\psi^2)+\int_t^T U'(c_s^2)(c_s^1-c_s^2)ds\right)\Big|\mathcal{G}_t\right]^\kappa\\&\quad\times\exp\Big(\int_0^T pU'(c_s^2)(c_s^1-c_s^2)ds\Big).\end{aligned}$$

We use the same arguments to prove $\sup_{0\le t\le T}|\bar{K}_t^\epsilon|\in\mathbf{L}^p(\mathbb{P})$.

From the representation theorem, there exist two continuous martingales $\bar{M}^{\epsilon,c}$, $\widetilde{M}^{\epsilon,c}$ and d predictable processes $\bar{k}^\epsilon,\widetilde{k}^\epsilon$ such that :

$$\bar{K}_t^\epsilon=K_0^\epsilon+\bar{M}_t^{\epsilon,c}+\sum_{i=1}^d\int_0^t\bar{k}_s^\epsilon dN_s^i$$

$$\frac{1}{\bar{K}_t^\epsilon}=\frac{1}{K_0^\epsilon}+\widetilde{M}_t^{\epsilon,c}+\sum_{i=1}^d\int_0^t\widetilde{k}_s^\epsilon dN_s^i.$$

These processes being positive $\mathbb{Q}^{*,1}$-submartingales, using (3.43) there exist two constants C_K and $\widetilde{C}_K$ such that :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\int_0^T (\bar{k}_s^\epsilon)^2 \widetilde{\lambda}_s^i ds\right] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}[(\bar{K}_T^\epsilon)^2] \leq C_K \\
&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\int_0^T (\widetilde{k}_s^\epsilon)^2 \widetilde{\lambda}_s^i ds\right] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\left(\frac{1}{\bar{K}_T^\epsilon}\right)^2\right] \leq \widetilde{C}_K
\end{aligned} \tag{3.44}$$

From the uniqueness of the representation theorem and equation (3.41), we get, for $1 \leq i \leq d$, :

$$-\Delta_\epsilon v_t^i = \ln\left(1 + \frac{\bar{k}_t^{\epsilon,i}}{\bar{K}_{t-}^\epsilon}\right) \quad \text{and} \quad \Delta_\epsilon v_t^i = \ln\left(1 + \widetilde{k}_t^i K_{t-}^\epsilon\right).$$

Therefore

$$\exp(|\Delta_\epsilon v_t^i|) - 1 \leq \frac{|\bar{k}_t^{\epsilon,i}|}{\bar{K}_{t-}^\epsilon} + |\widetilde{k}_t^{\epsilon,i}|\bar{K}_{t-}^\epsilon$$

and

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\int_0^T (e^{|\Delta_\epsilon v_s^i|} - 1)\widetilde{\lambda}_s^i ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\int_0^T \frac{|\bar{k}_s^{\epsilon,i}|}{\bar{K}_{s-}^\epsilon}\widetilde{\lambda}_s^i ds + \int_0^T |\widetilde{k}_s^{\epsilon,i}|\bar{K}_{s-}^\epsilon \widetilde{\lambda}_s^i ds\right] \\
&\leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\Big[\left(\sup_{0\leq t\leq T}\frac{1}{\bar{K}_t^\epsilon}\right)\int_0^T |\bar{k}_s^{\epsilon,i}|\widetilde{\lambda}_s^i ds + \left(\sup_{0\leq t\leq T}\bar{K}_t^\epsilon\right)\int_0^T |\widetilde{k}_s^{\epsilon,i}|\widetilde{\lambda}_s^i ds\Big]
\end{aligned}$$

We use the Cauchy inequalities and we get the following result :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\int_0^T (e^{|\Delta_\epsilon v_s^i|} - 1)\widetilde{\lambda}_s^i ds\right] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\Big[&\Big(\int_0^T \widetilde{\lambda}_s^i ds\Big)^{1/2}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\frac{1}{\bar{K}_t^\epsilon}\right)\left(\int_0^T |\bar{k}_s^{\epsilon,i}|^2\widetilde{\lambda}_s^i ds\right)^{1/2} \\
&+ \Big(\int_0^T \widetilde{\lambda}_s^i ds\Big)^{\frac{1}{2}}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\bar{K}_t^\epsilon\right)\left(\int_0^T |\widetilde{k}_s^{\epsilon,i}|^2\widetilde{\lambda}_s^i ds\right)^{1/2}\Big].
\end{aligned}$$

Then, using the Schwarz inequality again, we get the following result since $\bar{K}^\epsilon$ and $\frac{1}{\bar{K}^\epsilon} \in \mathrm{L}^p$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\int_0^T (e^{|\Delta_\epsilon v_s^i|} - 1)\widetilde{\lambda}_s^i ds\right] \leq &\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\frac{1}{(\bar{K}_s^\epsilon)^2}\int_0^T \widetilde{\lambda}_s^i ds\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\int_0^T |\widetilde{k}_t^{\epsilon,i}|^2\widetilde{\lambda}_s^i ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left(\sup_{0\leq t\leq T}(\bar{K}_t^\epsilon)^2\int_0^T \widetilde{\lambda}_s^i ds\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\int_0^T |\widetilde{k}_s^{\epsilon,i}|^2\widetilde{\lambda}_s^i ds\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Since the process $Z^{\mathbb{Q}^*,1} \in \mathrm{L}^p$ and using Cauchy-Schwartz inequalities, we get the following result :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*,1}\left[\int_0^T \widetilde{\lambda}_t^i dt\right]^2 &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Z_T^{\mathbb{Q}^*,1}\int_0^T e^{-v_s^{1,i}}\lambda_s^i ds\right]^2 \\
&\leq \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(Z_T^{\mathbb{Q}^*,1}\right)^2\int_0^T \lambda_s^i ds\int_0^T e^{-2v_s^{1,i}}\lambda_s^i ds\right] \\
&\leq c\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(Z_T^{\mathbb{Q}^*,1}\right)^4\right)^{\frac{1}{2}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\int_0^T e^{-2v_s^{1,i}}\lambda_s^i ds\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c_1\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(Z_T^{\mathbb{Q}^*,1}\right)^4\right)^{\frac{1}{2}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\int_0^T e^{-4v_s^{1,i}}\lambda_s^i ds\right)\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

where we make use several times of Assumption A4-iii). Moreover, we can see that

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T e^{-4v_s^{1,i}}\lambda_s^i ds\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T (e^{-v_s^{1,i}}-1+1)^4\lambda_s^i ds\right] \leq 16\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T (e^{-v_s^{1,i}}-1)^4\lambda_s^i ds + \int_0^T \lambda_s^i ds\right].$$

Therefore, since the martingale $-M^{1,c} + \int\sum_{i=1}^d \left(e^{-v_t^{1,i}}-1\right) dN_t^i$ belongs to $\mathbf{L}^p(\mathbb{P})$, and by assumption A4-iii) again, we conclude that $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T (e^{-v_s^{1,i}}-1)^p\lambda_s^i ds\right] < +\infty$ for any $p \geq 1$. Moreover since $Z^{\mathbb{Q}^*,1} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{P})$, we get that $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*,1}\left[\int_0^T \widetilde{\lambda}_s^i ds\right] < \infty$.

Then, using again Cauchy inequality :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*,1}\left[\int_0^T (e^{|\Delta_\epsilon v_s^i|}-1)\widetilde{\lambda}_s^i ds\right] \;\leq\; & C\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*,1}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\frac{1}{(\bar{K}_t^\epsilon)^4}\right]\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*,1}\left[\int_0^T |\bar{k}_s^{\epsilon,i}|^2\widetilde{\lambda}_s^i ds\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
& +C\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*,1}\left[\sup_{0\leq t\leq T}(\bar{K}_t^\epsilon)^4\right]\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*,1}\left[\int_0^T |\widetilde{k}_s^{\epsilon,i}|^2\widetilde{\lambda}_s^i ds\right]\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

From (3.43) and (3.44), we deduce that there exists a constant $C_2 > 0$ such that :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*,1}\left[\int_0^T (e^{|\Delta_\epsilon v_s^i|}-1)\widetilde{\lambda}_s^i ds\right] \leq C_2$$

and then using the expansion of the functional $x \to e^x$ we get :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*,1}\left[\int_0^T |\Delta_\epsilon v_s^i|^p\widetilde{\lambda}_s^i ds\right] \leq C_2 p!.$$

In order to conclude the proof of the lemma, it remains to establish that there exists a constant C_1 satisfying :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*,1}[\langle\Delta_\epsilon\widetilde{M^c}\rangle_T] \leq C_1.$$

First case : $(c^2,\psi^2) \geq (c^1,\psi^1)$, then $U(c^1+\epsilon(c^2-c^1)) \geq U(c^1)$ and $\bar{U}(\psi^1+\epsilon(\psi^2-\psi^1)) \geq \bar{U}(\psi^1)$. From Proposition 19, it follows that :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}|V^\epsilon_t - V^1_t|^2 + \langle \widetilde{M}^{\epsilon,c} - \widetilde{M}^{1,c}\rangle_T + \sum_{i=1}^d \int_0^T (v^{\epsilon,i}_t - v^{1,i}_t)^2 \widetilde{\lambda}^i_t dt\Big]$$
$$\leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\Big[\big[\bar{U}(\psi+\epsilon(\psi^2-\psi^1)) - \bar{U}(\psi^1)\big]^2 + \int_0^T \big[U(c^1_s+\epsilon(c^2_s-c^1_s)) - U(c^1_s)\big]^2 ds\Big]$$

Since

$$0 \leq U(c^1_t+\epsilon(c^2_t-c^1_t)) - U(c^1_t) \leq \epsilon U'(c^1_t)(c^2_t-c^1_t)$$

and

$$0 \leq \bar{U}(\psi^1+\epsilon(\psi^2-\psi^1)) - \bar{U}(\psi^1) \leq \epsilon \bar{U}'(\psi^1)(\psi^2-\psi^1).$$

we get :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}|\Delta_\epsilon V_t|^2 + \langle \Delta_\epsilon \widetilde{M}^c\rangle_T + \int_0^T (\Delta_\epsilon v^i_s)^2 \widetilde{\lambda}^i_s ds\Big] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\Big[\big(\bar{U}'(\psi^1)\big)^2(\psi^2-\psi^1)^2$$
$$+ \int_0^T \big(U'(c^1_s)\big)^2 (c^2_s-c^1_s)^2 ds\Big]$$

The process $Z^{\mathbb{Q}^{*,1}}$ belongs to $\mathbf{L}^p(\mathbb{P})$; moreover $U'(\psi^1)(\psi^2-\psi^1) \in \mathbf{L}^{\exp}$ and $U'(c^1_s)(c^2_s-c^1_s) \in D^{\exp}_1$ since $(c^1,\psi^1),(c^2,\psi^2) \in \mathcal{A}(x)$. It follows that there exists a constant $C>0$ such that :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}|\Delta_\epsilon V_t|^2 + \langle \Delta_\epsilon \widetilde{M}^c\rangle_T + \sum_{i=1}^d \int_0^T (\Delta_\epsilon v^i_s)^2 \widetilde{\lambda}^i_s ds\Big] \leq C$$

Second case : $(c^2,\psi^2) \leq (c^1,\psi^1)$. We first prove that for all $t \in [0,T]$, $\bar{K}^\epsilon_t \geq 1$. Let us recall that :

$$\bar{K}^\epsilon_t = \exp\left(-\Delta_\epsilon V_t + \int_0^t (\delta_s \Delta_\epsilon V_s - \Delta_\epsilon U_s) ds\right)$$

Define the process X as

$$X_t = -\Delta_\epsilon V_t + \int_0^t (\delta_s \Delta_\epsilon V_s - \Delta_\epsilon U_s) ds, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

>From integration by part formula, we get :

$$S_t^\delta X_t = -\Delta_\epsilon V_0 - \int_0^t S_s^\delta d\Delta_\epsilon V_s - \int_0^t S_s^\delta \Delta_\epsilon U_s ds$$

Since the process δ is positive and bounded, there exists a constant $L > 0$ such that $S^\delta < L < 1$. It follows that :

$$S_t^\delta X_t \geq (-1+L)\Delta_\epsilon V_0 - L\Delta_\epsilon V_t - \int_0^t S_s^\delta \Delta_\epsilon U_s ds$$

Note that, for all $t \in [0,T]$, $\Delta_\epsilon U_t \leq 0$ since $(c^2,\psi^2) \leq (c^1,\psi^1)$ and using comparison theorem $\Delta_\epsilon V_t \leq 0$.

Therefore, for all $t \in [0,T], X_t \geq 0$. Finally, $\bar{K}_t^\epsilon \geq 1$.

In the second step of the proof, we give the dynamics of the process $\bar{K}^\epsilon$ using Ito's calculus :

$$d\bar{K}_t^\epsilon = \bar{K}_{t-}^\epsilon \left(-d\Delta_\epsilon \widetilde{M}_t^c + \sum_{i=1}^d (e^{-\frac{(v_t^\epsilon - v_t^1)}{\epsilon}} - 1)d\widetilde{N}_t^i + dA_t \right)$$

where A is an increasing process. Since $\bar{K}^\epsilon$ is a positive $\mathbb{Q}^{*,1}$-submartingale, we obtain from (3.43) and $\bar{K}_t^\epsilon \geq 1$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\langle \Delta_\epsilon \widetilde{M}^c \rangle_T\right] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\int_0^T (\bar{K}_t^\epsilon)^2 d\langle \Delta_\epsilon \widetilde{M}^c \rangle_t\right] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[(\bar{K}_T^\epsilon)^2\right] \leq C_K$$

then we conclude :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\langle \Delta_\epsilon \widetilde{M}^c \rangle_T\right] \leq C_K.$$

Finally, by using concavity property we have shown that : $|\Delta_\epsilon V_t| \leq |V_t^2 - V_t^1|$, for all $t \in [0,T]$, then :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\Delta_\epsilon V_t|^2\right] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\sup_{t\in[0,T]} |V_t^2 - V_t^1|^2\right] \leq 2\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\sup_{t\in[0,T]} |V_t^1|^2 + \sup_{t\in[0,T]} |V_t^2|^2\right]$$

Therefore, since the process $V^1, V^2 \in D_0^{\exp}$ and $Z^{\mathbb{Q}^{*,1}}$ belongs to $\mathbf{L^p}$, we get by using Cauchy Schwarz inequality that there exists a constant C such that :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\Delta_\epsilon V_t|^2\right] \leq C.$$

□

Proof of Theorem 12 : Let recall first the equality :

$$\frac{1}{2}(\langle M^{\epsilon,c}\rangle - \langle M^{1,c}\rangle) = \frac{1}{2}\langle M^{\epsilon,c} - M^{1,c}\rangle + \langle M^{\epsilon,c}, M^{1,c}\rangle - \langle M^{1,c}\rangle,$$

then the equation (3.39) may be written as :

$$\begin{aligned}
&\Delta_\epsilon V_t - \int_0^t (\delta_s \Delta_\epsilon V_s - \Delta_\epsilon U_s)ds \\
&= \frac{1}{\epsilon}\Big(\frac{1}{2}\langle M^{\epsilon,c} - M^{1,c}\rangle_t + \langle M^{\epsilon,c}, M^{1,c}\rangle_t - \langle M^{1,c}\rangle_t\Big) \\
&+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \big[\frac{1}{\epsilon}(e^{-v_s^{\epsilon,i}} - e^{-v_s^{1,i}}) + e^{-v^{1,i}}\Delta_\epsilon v_s^i\big]\,\lambda_s^i ds + \Delta_\epsilon M_t^c \\
&+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \Delta_\epsilon v_s^i (dN_s^i - (e^{v^{1,i}} - 1)\lambda_s^i ds) \\
&= \frac{1}{2\epsilon}\langle M^{\epsilon,c} - M^{1,c}\rangle_t + \sum_{i=1}^d \int_0^t \Big[\frac{1}{\epsilon}(e^{-v_s^{\epsilon,i}} - e^{-v_s^{1,i}}) + e^{-v^{1,i}}\Delta_\epsilon v_s^i\Big]\lambda_s^i ds \\
&+ (\Delta_\epsilon M_t^c + \langle \Delta_\epsilon M^c, M^{1,c}\rangle_t) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \Delta_\epsilon v_s^i (dN_s^i - (e^{-v^{1,i}} - 1)\lambda_s^i ds).
\end{aligned}$$

By Girsanov theorem, the processes $\Delta_\epsilon \widetilde{M}^c := \Delta_\epsilon M^c + \langle \Delta_\epsilon M^c, M^{1,c}\rangle$ and $\widetilde{N}^i := N^i - \int_0^\cdot (e^{-v_s^{1,i}} - 1)\lambda_s^i ds$ are $\mathbb{Q}^{1,*}-$ martingales. It follows that the process $(\Delta_\epsilon V_t - \int_0^t (\delta_s \Delta_\epsilon V_s - \Delta_\epsilon U_s)ds)_{t\geq 0}$ is a $\mathbb{Q}^{1,*}$-submartingale.

$$\begin{aligned}
\Delta_\epsilon V_t - \int_0^t (\delta_s \Delta_\epsilon V_s - \Delta_\epsilon U_s)ds = \frac{\epsilon}{2}\langle \Delta_\epsilon \widetilde{M}^c\rangle_t + \sum_{i=1}^d \int_0^t \big[\frac{1}{\epsilon}(e^{-v_s^{\epsilon,i}} - e^{-v_s^{1,i}}) + e^{-v^{1,i}}\Delta_\epsilon v_s^i\big]\,\lambda_s^i ds \\
+ \Delta_\epsilon \widetilde{M}_t^c + \sum_{i=1}^d \int_0^t \Delta_\epsilon v_s^i d\widetilde{N}_s^i, \quad \mathbb{Q}^{1,*}\text{-}a.s.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Moreover, by using the uniform estimate (3.40), we get :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}}\Big(\frac{\epsilon}{2}\langle \Delta_\epsilon \widetilde{M}^c\rangle_T\Big) \leq C_p \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{2} = 0, \tag{3.46}$$

and using the expansion of the functional $x \to e^x$, we get :

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; & \lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}} \left(\int_0^T [\frac{e^{-v_s^{\epsilon,i}} - e^{-v_s^{1,i}}}{\epsilon} + e^{-v_s^{1,i}} \Delta_\epsilon v_s^i] \lambda_s^i ds \right) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{*,1}} \left(\int_0^T \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{\epsilon^{p-1}}{p!} (\Delta_\epsilon v_s^i)^p \widetilde{\lambda}_s^i ds \right) \\ & \leq \sum_{p=2}^{\infty} \epsilon^{p-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{1,*}} \left(\int_0^T \frac{|\Delta_\epsilon v_s^i|^p}{p!} \widetilde{\lambda}_s^i ds \right) \leq \sum_{p=2}^{\infty} C\epsilon^{p-1} = \frac{C\epsilon}{1-\epsilon}, \end{aligned}$$

thus, passing to the limit as $\epsilon \to 0$, we conclude that :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{E}^{Q^{*,1}} \left(\int_0^T [\frac{1}{\epsilon}(e^{-v_s^{\epsilon,i}} - e^{-v_s^{1,i}}) + e^{-v^{1,i}} \Delta_\epsilon v_s^i] \lambda_s^i ds \right) = 0, \qquad 1 \leq i \leq d. \tag{3.47}$$

Moreover, the estimate (3.40) ensures that the sequence $(\Delta_\epsilon V, \Delta_\epsilon \widetilde{M^c}, \Delta_\epsilon v)_{\epsilon>0}$ is bounded in $\mathcal{H}^2(\mathbb{P}) \times \mathcal{M}_0^2(\mathbb{P}) \times \mathcal{L}^2(\lambda, \mathbb{P})$. As a consequence, we can extract a subsequence $(\Delta_{\epsilon_k} V, \Delta_{\epsilon_k} M^c, \Delta_{\epsilon_k} v)_{k\in\mathbb{N}}$ which converges weakly in $\mathcal{H}^2(\mathbb{P}) \times \mathcal{M}_0^2(\mathbb{P}) \times \mathcal{L}^2(\lambda, \mathbb{P})$ and by Banach-Mazur Lemma, one may construct a sequence $(\widehat{V}^\epsilon, \widehat{M}^{\epsilon,c}, \widehat{v}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ of convex combinations of elements in $(\Delta_{\epsilon_k} V, \Delta_{\epsilon_k} \widetilde{M^c}, \Delta_{\epsilon_k} v)_{k\in N}$ of the form

$$\widehat{V}^\epsilon := \sum_{j=1}^{N_\epsilon} \alpha^{\epsilon_j} \Delta_{\epsilon_j} V, \quad \widehat{M}^{\epsilon,c} := \sum_{j=1}^{N_\epsilon} \alpha^{\epsilon_j} \Delta_{\epsilon_j} \widetilde{M^c}, \quad \widehat{v}^\epsilon := \sum_{j=1}^{N_\epsilon} \alpha^{\epsilon_j} \Delta_{\epsilon_j} v$$

such that $(\widehat{V}^\epsilon, \widehat{M}^{\epsilon,c}, \widehat{v}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ converges strongly in $\mathcal{H}^2(\mathbb{P}) \times \mathcal{M}_0^2(\mathbb{P}) \times \mathcal{L}^2(\lambda, \mathbb{P})$ to $(\partial_\epsilon V, \partial_\epsilon \widetilde{M^c}, \partial_\epsilon v)$. Moreover, the triple $(\widehat{V}^\epsilon, \widehat{M}^{\epsilon,c}, \widehat{v}^\epsilon)$ satisfies the BSDE's (3.45) associated with $(\widehat{U}^\epsilon, \widehat{\bar{U}}^\epsilon)$ where

$$\widehat{U}^\epsilon := \sum_{j=1}^{N_\epsilon} \alpha^{\epsilon_j} \Delta_{\epsilon_j} U, \quad \widehat{\bar{U}^\epsilon} := \sum_{j=1}^{N_\epsilon} \alpha^{\epsilon_j} \Delta_{\epsilon_j} \bar{U}.$$

Therefore, passing to the limit in this equation, thanks to (3.46), (3.47) and the dominated convergence theorem, we get that $(\partial_\epsilon V, \partial_\epsilon \widetilde{M^c}, \partial_\epsilon v)$ solves the BSDE's

$$\begin{cases} d\partial_\epsilon V_t &= (\delta_t \partial_\epsilon V_t - U'(c_t^1)(c_t^2 - c_t^1))dt + d\partial_\epsilon \widetilde{M}_t^c + \sum_{i=1}^d \partial_\epsilon v_t^i d\widetilde{N}_t^i, \quad \mathbb{Q}^{*,1}\text{-}a.s. \\ \partial_\epsilon V_T &= \bar{U}'(\psi^1)(\psi^2 - \psi^2). \end{cases}$$

Therefore $\left(S_t^\delta \partial_\epsilon V_t + \int_0^t S_s^\delta U'(c_s^1)(c_s^2 - c_s^1)ds\right)_{t\geq 0}$ is a $\mathbb{Q}^{*,1}$ martingale which can be written as :

$$S_t^\delta \partial_\epsilon V_t + \int_0^t S_s^\delta U'(c_s^1)(c_s^2 - c_s^1)ds = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{1,*}} \left[S_T^\delta \partial_\epsilon V_T + \int_0^T S_s^\delta U'(c_s^1)(c_s^2 - c_s^1)ds \Big| \mathcal{G}_t \right].$$

Hence we get :

$$\partial_\epsilon V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{1,*}}\Big[\frac{S_T^\delta}{S_t^\delta}\bar{U}'(\psi^1)(\psi^2-\psi^1)+\int_t^T \frac{S_s^\delta}{S_s^\delta}U'(c_s^1)(c_s^2-c_s^1)ds\Big|\mathcal{G}_t\Big].$$

$\square$

Chapitre 4

Méthodes numériques

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions différentes méthodes numériques pour calculer le prix d'un dérivé de crédit. L'objectif étant d'implémenter ces méthodes, basées sur des modèles simples, dans le logiciel PREMIA afin d'avoir un outil permettant de les comparer. PREMIA est un logiciel developpé par l'équipe MATHFI pour être mis à la disposition des acteurs financiers. Ce projet rassemble les chercheurs de l'INRIA (Institut National de la Recherche en Informatique et en Automatique), les chercheurs de l'Ecole des Ponts ParisTech (laboratoire de Mathématiques et d'Informatique appliquées du Cermics) et les chercheurs de l'université de Marne la Vallée. Il permet de calculer de façon efficiente le prix des produits dérivés issus des marchés financiers. Les principaux developpements dans PREMIA sont :

- Pricing des dérivés des taux d'interêt.
- Pricing des dérivés de crédit.
- Pricing et Couverture des dérivés d'action suivant le modèle de Black Scholes et le modèle d'Heston.
- Pricing et Couverture des dérivés d'action suivant les modèles à saut.
- Calibration des modèles à saut.

J'ai travaillé dans la section Risque de Crédit où j'ai particulièrement étudié l'évaluation des deux dérivés de crédit les plus échangés sur le marché : les CDS (Credit Default Swap) et les tranches CDO (Collatralized Debt Obligation).

Evaluer un CDS ou un CDO revient à calculer la jambe de paiement et la jambe de défaut versées par les deux contreparties. La difficulté majeure dans l'évaluation d'un CDO porte sur la corrélation entre les défauts. La faillite d'une entité peut entraîner celle d'une autre et ce risque de propagation du défaut demeure difficile à mesurer. Dans la littérature, l'outil le plus utilisé pour corréler les défauts est la copule. Connaissant les marginales des temps de défaut de chaque entité obtenues grâce à la courbe des spreads des CDS, la copule nous permettra de donner une loi jointe de défaut. La copule gaussienne fut la première développée mais le comportement de sa queue de distribution ne permettait pas d'affecter les défauts sur la tranche Senior (tranche la mieux sécurisée) ; la copule de Student et la Double-T copule furent développées pour rémédier à cette critique. Néanmoins toutes ces copules créent une corrélation statique et restent très critiquées. En effet il n'est par possible par ce caractère statique d'avoir des dynamiques des prix, ni de se couvrir contre le risque de défaut en utilisant de telles méthodes. Depuis quelques années de nouveaux outils sont développés pour rendre dynamique la corrélation entre les défauts et calculer le prix d'un dérivé de crédit. Ces approches s'appuient sur l'évaluation du processus de l'intensité de défaut de chaque firme (voir Herbertsson[41]) ou sur l'évaluation de l'intensité du processus de perte (voir Schönbucher [69]).

Etant définis les paramètres contractuels nous présenterons dans une première section l'évaluation d'un CDS et d'un CDO dans un cadre statique et dans la seconde partie, nous présenterons ces évaluations dans un cadre dynamique. Les formules de discrétisation font apparaître un nouveau terme :"Accrual Payment". [1]

4.2 Spread d'un CDS et d'un CDO dans un cadre statique

On se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathbb{G})$ où tout au long de cette étude la probabilité $\mathbb{P}$ représente la probabilité risque neutre donnée par le marché. Les

[1] PREMIA est un Pricer developpé par le groupe MATHFI ENPC/INRIA

techniques utilisées pour l'évaluation d'un CDO, faisant intervenir plusieurs firmes, sont différentes de celles utilisées pour un CDS, portant sur le défaut d'une seule firme. Nous ferons dans les deux études, la même hypothèse sur les lois marginales. Néanmoins on peut porter un regard critique sur ces formules de valorisation du CDS données ci-dessous, car bien que le CDS porte sur le nom d'une firme, le défaut de cette firme dépend du défaut des autres firmes.

Assumption A 6. *Les temps de défauts suivent des lois exponentielles*

$$\tau_i \sim \mathcal{E}(\lambda^i), \qquad i = 1 \cdots d$$

4.2.1 Spread d'un CDS dans un cadre statique

Le Credit Default Swap (CDS) de maturité T est un contrat dont le souscripteur verse périodiquement des primes au vendeur jusqu'au moment du défaut d'une entité de référence ; en contrepartie le vendeur d'un tel contrat garantit jusqu'à la maturité du contrat de couvrir les pertes dues au défaut. Evaluer un CDS de maturité T revient à déterminer la jambe de paiement versée par l'acheteur de la protection et la jambe de défaut versée par le vendeur. On note par τ le moment de défaut de l'entité, on fixe le notionel à assurer $N = 1$, on note R le taux de recouvrement et r le taux d'intérêt, ces taux sont supposés constants. L'acheteur verse un spread κdt sur l'intervalle dt jusqu'au moment du défaut, la jambe de paiement vaut exactement $JP = \int_0^{T\wedge\tau} e^{-rt}\kappa dt$ et la jambe de défaut $JD = \int_0^T e^{-rt}(1-R)dH_t$. Le spread κ annuel doit vérifier l'équation : $\mathbb{E}(JP) = \mathbb{E}(JD)$, en discrétisant l'intervalle $[0,T]$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \cdots t_n = T$ on obtient :

$$\mathbb{E}(JP) = \sum_{i=1}^{n} e^{-rt_i}\kappa(t_i - t_{i-1})\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\tau \geq t_i\}}\right] + \sum_{i=1}^{n} \kappa\mathbb{E}\left[e^{-r\tau}(\tau - t_{i-1})\mathbf{1}_{\{t_{i-1}\leq\tau\leq t_i\}}\right].$$

Le deuxième terme de $\mathbb{E}(JP)$ est appelé "Accrual Payment", en supposant la longueur de l'intervalle $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ très petite, on fait l'approximation suivante : si le défaut se produit entre $[t_{i-1}, t_i]$ alors il se produit approximativement au milieu de l' intervalle. De même en utilisant la même discrétisation, on détermine la jambe de défaut :

$$\mathbb{E}(JD) = \sum_{i=1}^{n}(1-R)\mathbb{E}\left[e^{-r\tau}\mathbf{1}_{\{t_{i-1}\leq\tau\leq t_i\}}\right].$$

On déduit ainsi le spread du CDS κ :

$$\kappa = \frac{(1-R)\sum_{i=1}^{n} e^{-r\frac{(t_i+t_{i-1})}{2}}\mathbb{P}\left[t_{i-1}\leq\tau\leq t_i\right]}{\sum_{i=1}^{n} e^{-rt_i}(t_i-t_{i-1})\mathbb{P}\left[\tau\geq t_i\right]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e^{-r\frac{(t_i+t_{i-1})}{2}}(t_i-t_{i-1})\mathbb{P}\left[t_{i-1}\leq\tau\leq t_i\right]}.$$

Connaissant les paramètres contractuels, la formule de ce spread a été implémentée dans la librairie Premia/Credit Risk.

4.2.2 Evaluation d'une tranche de CDO dans un cadre statique

Un CDO (Collateralized Debt Obligation) est un produit financier issu de la tritrisation de paniers de dettes dont les entités de références sont des entreprises. Il est le plus souvent divisé en trois tranches principales (Equity, Mezzanine, Senior). La tranche Equity est la plus risquée et la tranche Senior la plus sécurisée, les acheteurs de la tranche Equity percoivent des coupons périodiques jusqu'à l'absorption de la tranche par les premiers défauts (exemple tranche standard Equity Itraxx, taux de recouvrement $R = 0.4$, les souscripteurs d'une telle tranche percoivent des coupons jusqu'au septième défaut) et au fur et à mesure de l'avènement des défauts, le rendement des tranches diminue. Dans le calcul du prix de ces tranches il est donc judicieux de vérifier que les tranches les plus risquées ont un spread plus élevé que les moins risquées. Pour évaluer ces spreads, nous corrélons les instants de défaut en considérant l'hypothèse suivante :

Assumption A 7. *Les temps de défauts dépendent d'un facteur de défaut commun ; conditionnellement à ce facteur, ils sont indépendants.*

Construction des temps de défauts

L'une des techniques de construction des temps de défauts vérifiant l' hypothèse (**A7**) repose sur les copules. Soient $X_1, X_2, \cdots, X_d$ les facteurs influençant les défauts des firmes $1, 2, \cdots, d$ (ces facteurs peuvent être interprètés comme des évènements macroéconomiques et idiosynchratiques influencant le rendement de l'entité). En utilisant une copule dont les termes non diagonaux de la matrice des covariances vallent $\rho^2 \in (0, 1)$ on peut décomposer chaque facteur de la manière suivante :

$$X_i = \rho V + \sqrt{1-\rho^2}V_i, \quad 1 \leq i \leq d$$

Les variables $V \sim V_i$ ont même loi et elles sont indépendantes, le facteur V sera appelé facteur de défaut commun à toutes les entités, et le facteur V_i le facteur idiosynchratique, propre à la firme. Pour construire les temps de défaut conditionnellement indépendants à ce facteur commun, il suffit de construire dans un premier temps un vecteur de lois uniformes sur $[0,1]$ correlées :

$$\left(\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \cdots, \widetilde{U}_d\right) = (F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2), \cdots, F_{X_d}(X_d))$$

où F_{X_i} représente la fonction de répartition de X_i, $1 \leq i \leq d$. Ensuite en supposant connue la fonction de répartition Q_i de la variable $\tau \sim \mathcal{E}(\lambda^i)$, on construit des temps de défaut satisfaisant l'hypothèse (**A7**) :

$$(\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\tau}_2, \cdots, \widetilde{\tau}_d) = \left(Q_1^{-1}(\widetilde{U}_1), Q_2^{-1}(\widetilde{U}_2), \cdots, Q_d^{-1}(\widetilde{U}_d)\right)$$

Par cette construction on vérifie de plus que pour chaque $i = 1 \cdots d$, $\widetilde{\tau}_i \sim \tau_i$. Dans la suite on appelera ce procédé simulation des défauts dans un modèle copule à un facteur.

Loi conditionnelle des temps défaut au facteur commun

La loi du vecteur $(\widetilde{\tau}_1, \widetilde{\tau}_2, \cdots, \widetilde{\tau}_d)$ conditionnellement au facteur commun V est donnée par :

$$\mathbb{P}\left(\widetilde{\tau}_1 \leq \theta_1, \widetilde{\tau}_2 \leq \theta_2, \cdots, \widetilde{\tau}_d \leq \theta_d \middle| V\right) = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{P}\left(\widetilde{\tau}_i \leq \theta_i \middle| V\right)$$

Pour déterminer cette loi il suffit de déterminer la loi conditionnelle de chaque défaut connaissant le facteur commun de défaut V.

Proposition 26. *Connaissant la loi du facteur idiosynchratique V_i (on notera F_{V_i} sa fonction de répartition), la loi conditionnelle au facteur commun V du temps de défaut $\widetilde{\tau}_i$, $1 \leq i \leq d$ est donnée par :*

$$\mathbb{P}(\widetilde{\tau}_i \leq \theta_i | V) = F_{V_i}\left[\frac{F_{X_i}^{-1}(Q_i(\theta_i)) - \rho V}{\sqrt{1-\rho^2}}\right], \quad \forall \theta_i \in \mathbb{R}^+.$$

Preuve : Soit $\theta_i \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\mathbb{P}(\widetilde{\tau}_i \leq \theta_i | V) = \mathbb{P}\left(Q_i^{-1}(\widetilde{U}_i) \leq \theta_i | V\right) = \mathbb{P}\left(\widetilde{U}_i \leq Q_i(\theta_i) | V\right) = \mathbb{P}\left(X_i \leq F_{X_i}^{-1}(Q_i(\theta_i)) | V\right)$$

Par définition $X_i = \rho V + \sqrt{1-\rho^2} V_i$, $1 \leq i \leq d$, et les variables V_i et V sont indépendantes, on déduit ainsi :

$$\mathbb{P}(\widetilde{\tau}_i \leq \theta_i | V) = \mathbb{P}\left[V_i \leq \frac{F_{X_i}^{-1}(Q_i(\theta_i)) - \rho V}{\sqrt{1-\rho^2}} \Big| V \right] = F_{V_i}\left[\frac{F_{X_i}^{-1}(Q_i(\theta_i)) - \rho V}{\sqrt{1-\rho^2}} \right]$$

Remark 6. *Copules.*

Dans le cas d'une copule gaussienne à un facteur, les variables V et V_i suivent des lois normales centrées réduites indépendantes, soit $F_{V_i} = F_{X_i} = \Phi$ où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

Dans le cas de la copule Double-T où l'on suppose que les variables V et V_i sont deux variables aléatoires de Student de paramètres ν et $\bar{\nu}$, la variable X_i n'est pas une variable de Student, il faut donc implémenter pour chaque paramètre ρ cette fonction de répartition.

Loi du nombre de défaut à un instant donné

La loi du nombre de défauts réalisés à tout instant est essentiel pour valoriser un dérivé de crédit dont le sous-jacent est un panier de dettes. En effet le prix d'un CDO peut s'écrire comme l'espérance d'une fonction du nombre de défaut. Pour évaluer cette loi en utilisant le modèle de copule à un facteur, il suffit de conditionner tous les calculs par rapport à ce facteur.

Proposition 27. *Soit f la fonction de densité du facteur V, en supposant l'hypothèse (**A 7**) et $N_t = \sum_{i=1}^d \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$ le nombre de défauts réalisés à l'instant t, la loi de N_t est donnée par :*

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \int_{\mathbb{R}} l_k(t,v) f(v) dv, \quad k = 1 \cdots d$$

où les coefficients $l_k(t,v)$ pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $v \in \mathbb{R}$ satisfont l'équation :

$$\prod_{i=1}^d [(1 - \mathbb{P}(\tau_i \leq t | V = v)) + u\mathbb{P}(\tau_i \leq t | V = v)] = u^d l_d(t,v) + u^{d-1} l_{d-1}(t,v) + \cdots u^1 l_1(t,v) + l_0(t,v), \quad u \in \mathbb{R}$$

Preuve : Pour démontrer cette proposition, il suffit de calculer la fonction génératrice du nombre de défauts à tout instant $t \in [0,T]$. Soit $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}\left[u^{N_t}\right] = \sum_{k=0}^d \mathbb{P}(N_t = k) u^k, \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{4.1}$$

En calculant cette fonction génératrice conditionnellement au facteur commun V on obtient :

$$\mathbb{E}\left[u^{N_t}|V\right] = \prod_{k=1}^{d} \mathbb{E}\left[u^{\mathbf{1}_{\{\widetilde{\tau}_i \leq t\}}}|V\right], \qquad \forall t \in [0,T]$$

car les temps de défauts sont conditionnellement indépendants au facteur commun V. Connaissant les probabilités conditionnelles de défaut des entités au facteur V on obtient :

$$\mathbb{E}\left[u^{N_t}|V\right] = \prod_{k=1}^{d} \left[u^0\left(1 - \mathbb{P}(\widetilde{\tau}_i \leq t|V)\right) + u^1 \mathbb{P}(\widetilde{\tau}_i \leq |V)\right]. \tag{4.2}$$

En transformant le polynôme (4.2) de degré d en u en un polynôme canonique, pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $v \in \mathbb{R}$, il existe $l(t,v) = (l_k(t,v))_{0 \leq k \leq d}$ tel que :

$$\prod_{k=1}^{d} \left[(1 - \mathbb{P}(\widetilde{\tau}_i \leq t|V = v)) + u\mathbb{P}(\widetilde{\tau}_i \leq t|V = v)\right] = u^d l_d(t,v) + u^{d-1} l_{d-1}(t,v) + \cdots u^1 l_1(t,v) + l_0(t,v). \tag{4.3}$$

En calculant l'espérance de (4.2) et en utilisant la transformation canonique (4.3), on déduit :

$$\mathbb{E}\left[u^{N_t}\right] = \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^{d} l_k(t,v) u^k\right] f(v)dv = \sum_{k=0}^{d} \left[\int_{\mathbb{R}} l_k(t,v) f(v)dv\right] u^k. \tag{4.4}$$

On déduit ainsi en utilisant (4.1) et (4.4) que pour tout $t \in [0,T]$ et $k \in \{0, 1, \cdots, d\}$:

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \int_{\mathbb{R}} l_k(t,v) f(v)dv.$$

□

Pour implémenter la loi du nombre de défaut à tout instant $t \in [0,T]$ il faut donc écrire une procédure permettant de décomposer le polynôme (4.2) en un polynôme canonique pour tout $v \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [0,T]$ connaissant les probabilités conditionnelles pour le couple (t,v) donné.

Remark 7. *En supposant que les entités sont identiques, c'est à dire qu'elles ont la même intensité de défaut, la décomposition canonique* (4.3) *devient explicite en utilisant le binôme de Newton :*

$$l_k(t,v) = C_d^k (\mathbb{P}(\widetilde{\tau}_i \leq t|V = v))^k (1 - \mathbb{P}(\widetilde{\tau}_i \leq t|V = v))^{d-k}, \qquad 0 \leq k \leq d.$$

$\forall (t,v) \in [0,T] \times \mathbb{R}$.

Expression de la perte d'une tranche de CDO

Dans cette partie nous traduisons l'expression d'une perte sur une tranche CDO en fonction du nombre de défaut. En effet en considérant une tranche CDO $[a,b]$(a représente le point d'attachement et b le point de détachement), l'impact des défauts sur la tranche se produit dès que le pourcentage des pertes dépasse le point d'attachement a et le rendement de la tranche devient nul lorsque le pourcentage de perte dépasse le point de détachement b. En posant $L=(L_t)_{t\leq T}$ le processus représentant le pourcentage de perte, l'expression de la fonction de perte $M_{a,b}$ sur la tranche CDO $[a,b]$ à un instant $t\in[0,T]$ s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} M_{a,b}(t) &= 0.\mathbf{1}_{\{L_t\leq a\}} + (L_t-a).\mathbf{1}_{\{L_t\in[a,b]\}} + (b-a).\mathbf{1}_{\{L_t\geq b\}} \\ &= (L_t-a)_+ - (L_t-b)_+ \end{aligned}$$

Il suffit d'identifier le processus de pourcentage de perte pour avoir une écriture plus explicite de l'espérance de perte d'une tranche de CDO. En supposant que le CDO est un panier de d dettes dont le taux de recouvrement de l'entité i en cas de défaut est R_i sur un notionel N_i,$1\leq i\leq d$, le pourcentage de perte à l'instant t est donné par :

$$L_t = \frac{1}{\sum_{i=1}^d N_i}\sum_{i=1}^d N_i(1-R_i)\mathbf{1}_{\{\tau_i\leq t\}}, \qquad \forall t\in[0,T].$$

Assumption A 8. *Le portefeuille de dettes est homogène, $N_i=N$ et $R_i=R$ pour tout $i=1\cdots d$.*

Cette hypothèse nous permet de décrire directement le pourcentage de perte en fonction du nombre de défauts :

$$L_t = \frac{(1-R)}{d}.N_t, \qquad \forall t\in[0,T].$$

En utilisant cette expression du processus du pourcentage de perte, nous obtenons l'espérance de perte de la tranche de CDO $[a,b]$:

$$\mathbb{E}\left[M_{a,b}(t)\right] = \sum_{k=0}^{d}\left[\left(\frac{(1-R)}{d}k-a\right)_+ - \left(\frac{(1-R)}{d}k-b\right)_+\right]\mathbb{P}(N_t=k), \qquad \forall t\in[0,T].$$

Connaissant la loi du nombre de défaut à tout instant, on peut évaluer l'espérance de la perte sur une tranche de CDO, on peut obtenir les différentes jambes de paiement et de défaut afin de déterminer le spread d'une tranche de CDO.

Spread d'une tranche de CDO

Pour déterminer le spread annuel nous évaluons tout d'abord la jambe de défaut et la jambe de paiement.

Jambe de défaut Elle représente la somme des versements qu'il faut verser pour se couvrir des défauts sur la tranche de CDO. Plus explicitement, considérons une tranche CDO $[a, b]$, lorsque le défaut d'une entité i se produit le versement nécessaire permettant de supporter cette perte vaut exactement $M_{a,b}(\tau_i) - M_{a,b}(\tau_{i^-})$. On mesure ainsi l'impact du défaut de l'entité i en calculant la perte avant et après le défaut. En d'autres termes, nous pouvons définir la jambe de défaut par :

$$JD = \int_0^T e^{-rt} dM_{a,b}(t) = \sum_{i=1}^{d} e^{-r\tau_i} \left(M_{a,b}(\tau_{i^+}) - M_{a,b}(\tau_{i^-}) \right).$$

Pour avoir une approximation du calcul de la jambe de défaut, sachant que les paiements se font sur des échéances fixées à l'avance $0 \leq t_1 \leq t_2 \cdots \leq t_n = T$, nous discrétisons l'intervalle $[0, T]$ en $0 \leq \bar{t}_1 \leq \bar{t}_2 \leq \cdots \bar{t}_m$ où m sera le nombre de points de la grille de défauts suffisamment grand pour tenir compte du nombre de défaut. Nous supposons que si le défaut j survient sur l'intervalle $[\bar{t}_j, \bar{t}_{j+1}]$ alors il a lieu au milieu de l'intervalle et nous supposons que pour point t_i appartenant à la grille des paiements, il existe un point $\bar{t}_j$ appartenant à la grille de défauts tel que $t_i = \bar{t}_j$ (il est nécessaire de considérer plus de points sur la grille de défaut que sur la grille des paiements pour que cette hypothèse soit satisfaite $m > n$). En utilisant la grille des défauts :

$$\mathbb{E}(JD) = \sum_{j=0}^{m} e^{-r\frac{(\bar{t}_{j+1}+\bar{t}_j)}{2}} \left(\mathbb{E}\left[M_{a,b}(\bar{t}_{j+1})\right] - \mathbb{E}\left[M_{a,b}(\bar{t}_j)\right] \right).$$

Jambe de paiement La jambe de paiement d'une tranche CDO est la somme des paiements en coupons que guarantit l'achat. Les coupons sont versés périodiquement suivant les grilles des paiements et le spread sur une longueur dt est fixé à κdt (κ représente le spread annuel), la tranche $[a, b]$ valant en proportion $b - a$, elle est absorbée à chaque instant t par la perte supportée par la tranche $M_{a,b}(t)$, ainsi sur l'intervalle dt, le coupon que reçoit l'acheteur vaut $\kappa(b-a-M_{a,b}(t))dt$, on déduit ainsi :

$$JP = \int_0^T e^{-rt}\kappa(b-a-M_{a,b}(t))dt.$$

En utilisant la grille des paiements on obtient :

$$\mathbb{E}(JP) = \kappa\sum_{i=1}^{n} e^{-rt_i}\left(b-a-\mathbb{E}\left[M_{a,b}(t_i)\right]\right)(t_i-t_{i-1}).$$

Mais en tenant compte du fait que les paiements n'ont pas lieu au moment du défaut il faut corriger le calcul en ajoutant un terme supplémentaire pour compenser cette inégalité l'Accrual Payment(AP). Soit $t_{k(j)}$ la date du dernier paiement avant le défaut de l'entité j. Pour tenir compte du fait que le paiement j n'a pas lieu en τ_j mais en $t_{k(j)}$ étant donné un spread annuel κ on ajoute au calcul de la jambe de paiement le terme : $\kappa e^{-r\tau_j}\left(M_{a,b}(\tau_{j^+})-M_{a,b}(\tau_{j^-})\right)(\tau_j-t_{k(j)})$. Ainsi en utilisant la grille de discrétisation des défauts et les hypothèses faites on obtient :

$$\mathbb{E}(AP) = \frac{\kappa}{2}\sum_{j=0}^{m} e^{-r\frac{(\bar{t}_{j+1}+\bar{t}_j)}{2}}\left(\mathbb{E}[M_{a,b}(\bar{t}_{j+1})]-\mathbb{E}[M_{a,b}(\bar{t}_j)]\right)(\bar{t}_{j+1}-\bar{t}_j).$$

Remark 8. *L'Accrual Payment est un terme négligeable, il est le plus souvent omis dans les calculs lors de la discrétisation.*

Connaissant la jambe de paiement et la jambe de défaut, on peut ainsi déduire le spread annuel κ de la tranche est défini tel que $\mathbb{E}(JD) = \mathbb{E}(JP+AP)$ ainsi on déduit la formule du spread donné par :

$$\kappa = \frac{\sum_{j=1}^{m} e^{-r\frac{(\bar{t}_j+\bar{t}_{j-1})}{2}}\left(\mathbb{E}\left[M_{a,b}(\bar{t}_j)\right]-\mathbb{E}\left[M_{a,b}(\bar{t}_{j-1})\right]\right)}{\sum_{i=1}^{n} e^{-rt_i}\left(b-a-\mathbb{E}\left[M_{a,b}(t_i)\right]\right)\Delta_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} e^{-r\frac{(\bar{t}_j+\bar{t}_{j-1})}{2}}\left(\mathbb{E}[M_{a,b}(\bar{t}_j)]-\mathbb{E}[M_{a,b}(\bar{t}_{j-1})]\right)\bar{\Delta}_j}.$$

où $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ et $\bar{\Delta}_j = \bar{t}_j - \bar{t}_{j-1}$. Connaissant l'espérance de perte sur la tranche CDO $[a,b]$, nous sommes donc en mesure de définir les différentes étapes pour calculer numériquement le spread d'une tranche de CDO :

Etape 1 : Définir la copule et tous ses paramètres.

Etape 2 : Implémenter la fonction de répartition du facteur idiosynchratique V_i et l'inverse de la fonction de répartition du facteur X_i.

Etape 3 : Implémenter la probabilité conditionnelle de la loi de chaque défaut connaissant le facteur V :($\mathbb{P}(\widetilde{\tau}_i \leq \theta_i | V = v)$.

Etape 4 : Ecrire une procédure qui prend en paramètre les paramètres de la copule, le temps t et le facteur commun v et qui renvoie les coefficients de la décomposition polynomiale (4.3), $l(t, v)$), implémenter la loi du nombre de défauts en utilisant la Proposition27.

Etape 5 : Définir les caractéristiques de la tranche CDO(nombre d'entités d, taux de recouvrement $(R_i)_{1 \leq i \leq d}$, notionel $(N_i)_{1 \leq i \leq d}$, taux d'interêt r, point d'attachement a et point de détachement b) déterminer ainsi le pourcentage de perte et implémenter une fonction renvoyant l'espérance de perte sur la tranche CDO pour tout $t \in [0, T]$: $\mathbb{E}\left[M_{a,b}(t)\right]$

Etape 6 : Définir la grille des paiements et la grille des défauts et évaluer l'espérance du pourcentage de perte de la tranche sur ces grilles de temps puis déduire le spread de la tranche CDO.

Ces différentes étapes ont été suivies par l'implémentation du calcul de spread d'une tranche de CDO dans PREMIA et les résultats obtenus comparables à ceux d'Hull and White lors de la calibration du paramètre de corrélation attestent bien la validité de la méthodologie énoncée.

4.2.3 Calibration du paramètre de corrélation et pricing d'une tranche non standard

Comme dans le modèle Black-Scholes où l'on cherche à calibrer la volatilité grâce aux données historiques, nous nous consacrons dans cette partie à déterminer la bonne corrélation "ρ" qu'il faut pour déterminer le prix d'une tranche de CDO sur le marché. Les données historiques sur les spreads des tranches CDO standards (tranches Itraxx et CDX) montrent qu'en inversant les formules des spreads on ne retouve pas une corrélation ρ constante ce qui devait être le cas si le modèle de copule initial était parfait. Malgré l'imperfection du modèle, comme dans le modèle de Black-Scholes où l'on remarque un smile de volatilité par rapport aux strikes, on remarque, dans le modèle copule gaussien à un facteur, une courbe affine sur la corrélation des tranches dont le point d'attachement est nul en d'autres termes la fonction $\rho : [0, x] - \rightarrow \rho([0, x]) = ax + b$ est une droite affine, où $x \in (0, 1)$ représente la point de détachement de la tranche : c'est le principe de Base-correlation. En utilisant les données Itraxx ou CDX on peut donc reconstruire la corrélation des tranches dont le point d'attachement est nul et par un principe de non arbitrage on peut déduire la corrélation de toute tranche et calculer son spread sur le marché.

Assumption A 9. *Abscence d'Opportunité d'Arbitrage.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $0 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n = b$, $n+1$ *points de détachements distincts et* $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{n-1}$ *les corrélations correspondantes aux tranches* $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \cdots [a_{n-1}, a_n]$ *le marché est sans opportunité d'arbitrage si et seulement si la corrélation* ρ *de la tranche* $[0, b]$ *vérifie l'équation suivante :*

$$JD([0, b], \rho) = \sum_{i=1}^{n} JD\left([a_{i-1}, a_i], \rho_{i-1}\right).$$

où JD *représente la fonction donnant la jambe de défaut pour une tranche de CDO et une corrélation données. Cette hypothèse revient à affirmer que vendre une tranche* $[0, b]$ *revient à la découper en petites tranches et les vendre sur le marché sans aucun bénéfice supplémentaire.*

Pricing d'une tranche par Base-correlation sous AOA

Le pricing d'une tranche non standard se fait en utilisant les données des tranches standards dont les points d'attachements sont fixés (exemple tranches Itraxx points de détachement 0,0.03,0.06,0.09,0.12 et 0.22) pour déterminer le prix d'une tranche non standard $[a, b]$ par Base-correlation sous AOA il faut procéder de la manière suivante :

Etape 1 : Encadrer le point d'attachement a et le point de détachement b par des points standards exemple $[a, b] = [0.04, 0.08]$, alors l'encadrement est : $0.03 \leq a \leq 0.06$ et $0.06 \leq b \leq 0.09$.
Etape 2 : Déterminer par interpolation vu la courbe affine de la Base-correlation, les corrélations des tranches $[0, a]$ et $[0, b]$ en utilisant les encadrements par les points standards effectués.

Etape 3 : Par l'hypothèse d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage, déterminer la corrélation de la tranche CDO $[a, b]$, déduire son spread.

Quelques résultats obtenus

Dans cette partie nous décrivons quelques résultats obtenus sur le pricing des tranches standards en utilisant le principe de Base-correlation et l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Nous disposons des données avant la crise actuelle sur la prévisions des spreads :

Maturité	20/06/2010	20/06/2012	20/06/2014	20/06/2017
Spread	13	24	33	44

Quoted index CDS spread 02/04/2007

	0.03	0.06	0.09	0.12	0.22
20/06/2010	-1.76	4	1	0	0
20/06/2012	11.25	58	15	7	3
20/06/2014	25.75	135	39	18	6
20/06/2017	40.50	340	99	46	14

Quoted CDO tranches margins/upfront

Nous obtenons les résultats sur des tranches non standards dont les points d'attachement et de détachement sont diffèrents de ceux des tranches de CDO Itraxx :

att-det	0.04-0.05	0.04-0.1	0.02-0.08	0.02-0.1	0.05-0.07
Base-Correlation	276.34	142.63	260.28	206.77	175.767

Pricing des tranches non standards 20/06/2014

4.3 Spread de l'index CDS et d'un CDO dans cadre dynamique

Dans cette partie l'objectif est de simuler les trajectoires des spreads des CDS et des tranches de CDO en tenant compte de l'information sur le marché et sur les entités ayant fait défaut. Nous travaillons suivant deux approches : l'approche Bottom up et l'approche Top down. Nous étudions les différentes méthodes d'évaluation de l'index CDS et d'un CDO dans ces deux approches et nous discutons des différents résultats numériques obtenus.

4.3.1 Approche Bottom Up

Comme nous l'avons remarqué dans le calcul des spreads le plus important est la caractérisation de la loi du processus de perte du portefeuille à tout instant. Nous pouvons procéder de deux manières pour caractériser cette loi. Soit nous caractérisons directement le processus de perte en supposant que c'est une chaîne de Markov inhomogène, les équations de Kolmogorov nous donnent des formules semi-fermées et nous permettent de déduire la loi de la perte : c'est l'approche Top Down. Soit nous caractérisons l'intensité de chaque entité et l'influence d'un défaut sur cette intensité ce qui nous permet de déduire la loi de la perte à tout instant : c'est l'approche Bottom Up. Nous étudions dans une première partie cette approche à travers les travaux d'Herbertsson [41]. Nous mettons en évidence les méthodes de valorisation de l'index CDS et d'une tranche CDO et nous définissons la procédure à suivre pour l'implémentation de ces différentes méthodes.

Assumption A 10. *Dans cette approche Bottom up nous travaillons avec les hypothèses d'Hebertsson [41] à savoir nous supposons que la filtration de référence $\mathbb{F}$ est triviale et que le portefeuille est homogène. L'intensité de défaut de l'entité i à l'instant t, $\lambda_t^i = \lambda_t$ sera définie par :*

$$\lambda_t = a + \sum_{k=1}^{d-1} b_k \mathbf{1}_{T_k \leq t}, \qquad t \geq 0 \tag{4.5}$$

où $(T_k)_{1 \leq k \leq d}$ représente la suite ordonnée des temps de défaut. Le terme a représente l'intensité initiale, et le terme b_k représente le saut de l'intensité de l'entité i dû au défaut de l'entité k, il est négatif, positif ou nul suivant une corrélation positive, négative ou nulle entre les deux entités.

Remark 9. *Supposer que la filtration de reférence est triviale revient à supposer qu'on ne tient pas compte dans la suite du risque de spread (dû aux bruits du marché achat et vente influencant les prix).*

Proposition 28. *(Hebertsson [41]). Il existe une chaîne de Markov $(Y_t)_{t\geq 0}$ sur un espace d'état fini $E = \{0, 1, 2, , \cdots, d\}$ tel que les temps d'arrêts :*

$$T_k = \inf\{t > 0 : Y_t = k\}, \qquad k = 1, \cdots d$$

sont les temps ordonnés des d temps de défaut échangeables $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_d$ dont les intensités sont définies par (4.5). Le générateur Q de Y est donné par :

$$Q_{k,k+1} = (d-k)\left(a + \sum_{j=1}^{k} b_j\right), \quad Q_{k,k} = -Q_{k,k+1} \text{ pour tout } k = 0, 1 \cdots, d-1$$

Les autres termes de la matrice Q sont nuls. La chaîne de Markov commence à l'etat $\{0\}$.

En utilisant les propriétés des processus de Markov et l'échangeabilité des temps de défaut, nous déduisons les probabilités jointes de survie nécessaires pour le calcul du prix des dérivés de crédit.

Proposition 29. *Considérons les d entités dont les intensités sont définies par (4.5) et soit $q \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq d$, on obtient :*

$$\mathbb{P}(\tau_1 \geq t, \cdots \tau_q \geq t) = \alpha e^{Qt} s^{(q)}, \qquad \mathbb{P}(\tau_1 \geq t, \cdots \tau_q \geq t | Y_t = j) = \frac{C^q_{d-j}}{C^q_d} \text{ pour } j \leq d-q$$

où $\alpha = (1, 0, \cdots 0)$ représente la distribution initiale sur E et $s^{(q)}_j = \frac{C^q_{d-j}}{C^q_d}, 1 \leq j \leq d$.

Etant définies les lois jointes des temps de défaut, il est donc possible de retrouver l'espérance conditionnelle de perte sur l'index CDS ou sur une tranche de CDO.

Spread de l'index CDS dans cadre dynamique

Contrairement au calcul du spread d'un CDS, le calcul de l'index CDS se fait sur un panier de dette. L'index CDS porte sur le panier total de dettes c'est un CDO dont le point d'attachement vaut 0 et le point de détachement vaut 1. En supposant que l'investisseur sur l'index CDS à l'instant t reçoit un coupon $\kappa_t ds$ sur un intervalle de longueur ds, on détermine le spread annuel κ fixé à l'instant t tel que la jambe de paiement et la jambe de défaut soient égales.

Jambe de paiement En tenant compte que le point d'attachement est nul et que le point de détachement vaut 1, la jambe de paiement sur l'intervalle $[t, T]$ est définie par $JP_{t,T} = \kappa_t \int_t^T e^{-r(s-t)}(1 - L_s)ds$, ainsi en discrétisant l'intervalle $[t, T]$, $t = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = T$ et en tenant compte des fréquences de paiements on obtient :

$$\mathbb{E}(JP_{t,T}|Y_t = j) = \kappa_t \sum_{i=1}^{n} e^{-r(t_i - t_0)} \left(1 - \mathbb{E}(L_{t_i}|Y_{t_0} = j)\right)(t_i - t_{i-1}).$$

Remark 10. *On ne tient pas compte de l'Accrual Payment dans ce cadre.*

Jambe de défaut On rappelle que la jambe de défaut sur l'intervalle $[t, T]$ est définie par $JD = \int_t^T e^{-r(s-t)}dL_s$. En faisant une intégration par parties, on trouve $JD_{t,T} = e^{-r(T-t)}L_T - L_t + \int_t^T re^{-r(s-t)}L_s ds$; en discrétisant sur la grille de défauts $0 = \bar{t}_0 \leq \bar{t}_1 \leq \cdots \leq \bar{t}_m = T$ on obtient :

$$\mathbb{E}(JD_{t,T}|Y_t = j) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(L_T|Y_t = j) - \frac{(1-R)j}{d} + \sum_{i=1}^{m} re^{-r(\bar{t}_i - \bar{t}_0)}\mathbb{E}(L_{\bar{t}_i}|Y_{\bar{t}_0} = j)(\bar{t}_i - \bar{t}_{i-1}).$$

.

Spread d'une tranche de CDO dans cadre dynamique

Soit une tranche de CDO $[a, b]$ et $M_{a,b}(t)$ la perte supportée par la tranche de CDO $[a, b]$ à l'instant t. Les jambes de paiment et de défaut sont calculées en utilisant le même principe que précédemment.

Jambe de paiement Etant défini un spread κ_t à l'instant t, la jambe de paiment est définie par $JP_{t,T} = \kappa_t \int_t^T e^{-r(s-t)}(b - a - M_{a,b}(s))ds$, en discrétisant sur la grille des paiements on obtient :

$$\mathbb{E}(JP_{t,T}|Y_t = j) = \sum_{i=1}^{n} e^{-r(t_i - t_0)} \left(b - a - \mathbb{E}(M_{a,b}(t_i)|Y_{t_0} = j\right)(t_i - t_{i-1}).$$

Jambe de défaut De même la jambe de défaut est définie par $JD_{t,T} = \int_t^T e^{-r(s-t)}dM_{a,b}(s)$, en utilisant une intégration par parties et en discrétisant sur la grille de défauts on obtient :

$$\mathbb{E}(JD_{t,T}|Y_t = j) = e^{-r(T-t)}M_{a,b}(T) - M_{a,b}(t) + r\sum_{i=1}^{n} e^{-r(\bar{t}_i - \bar{t}_0)}\mathbb{E}\left(M_{a,b}(\bar{t}_i)|Y_t = j\right)(\bar{t}_i - \bar{t}_{i-1}).$$

Remark 11. *Il est important de remarquer que conditionnellement à Y_t, les lois des temps de défaut sont données, nous pouvons calculer le spread de l'index CDS et d'une tranche de CDO à tout instant $t \in [0,T]$.Il est défini tel que $\mathbb{E}(JP|Y_t = j) = \mathbb{E}(JD|Y_t = j)$, on retrouve ainsi les dynamiques des spread de ces deux dérivés de crédit. Nous étudions dans la suite les dynamiques des spreads dans l'approche Top down. Nous pouvons calculer les spreads de l'index CDS et d'une tranche CDO connaissant la probabilité jointe des défauts à l'instant $t = 0$. D'après les formules précédentes, pour déterminer les jambes de paiement et de défaut, il suffit de calculer l'espérance de la perte.*

Lemma 5. *Considérons un portefeuille de d dettes. Etant donné le générateur Q, l'espérance de perte sur l'index CDS et l'espérance de perte sur une tranche CDO $[a,b]$ à l'instant t sont données par :*

$$\mathbb{E}\left[L_t\right] = \alpha e^{Qt} l, \qquad \mathbb{E}\left[M_{a,b}(t)\right] = \alpha e^{Qt} m_{a,b}.$$

où $\alpha = (1,0,\cdots,0)$ représente la distribution initiale du processus de Markov Y, l représente le vecteur de perte, au j-ieme défaut $l_j = \frac{(1-R)}{d} j, 1 \leq j \leq d$ et $m_{a,b}$ représente le vecteur de perte sur la tranche $[a,b]$, au j-ieme défaut $m_{a,b}(j) = \left[\frac{(1-R)}{d} j - a\right] 1_{\{j \in [n_l, n_u]\}} + (b-a) 1_{\{j > n_u\}}$ $\Big($$n_l$ représente le nombre minimum de défauts à partir duquel la tranche est absorbée par les défauts, $n_l = \left[\frac{a}{1-R} d\right]$ et n_u représente le nombre minimum de défauts à partir duquel la tranche est totalement absorbée $n_u = \left[\frac{b}{1-R} d\right]$$\Big)$.

En utilisant le lemme précédent, on déduit une écriture plus explicite de la jambe de défaut sur l'index CDS sur $[0,T]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[JD_{0,T}\right] = e^{-rT}\mathbb{E}(L_T) + r\int_0^T e^{-rt}\mathbb{E}(L_t)dt &= e^{-rT}\alpha e^{QT} l + r\int_0^T \alpha e^{(Q-rI)t} l dt \\ &= \alpha\left(e^{-rT}e^{QT} + r(Q-rI)^{-1}(e^{(Q-rI)T} - I)\right) l\end{aligned}$$

On déduit de même une expression plus simplifiée de la jambe de défaut d'une tranche de CDO $[a,b]$:

$$\mathbb{E}(JD_{0,T}) = \alpha\left(e^{-rT}e^{QT} + r(Q-rI)^{-1}(e^{(Q-rI)T} - I)\right) m_{a,b}$$

On obtient ainsi une écriture simplifiée du spread d'une tranche de CDO $[a, b]$:

$$\kappa = \frac{\alpha \left(e^{-rT} e^{QT} + r(Q - rI)^{-1} (e^{(Q-rI)T} - I) \right) m_{a,b}}{\sum_{i=1}^{n} e^{-rt_i} \left(b - a - \alpha e^{Qt_i} m_{a,b} \right) (t_i - t_{i-1})}.$$

et du spread de l'index CDS :

$$\kappa = \frac{\alpha \left(e^{-rT} e^{QT} + r(Q - rI)^{-1} (e^{(Q-rI)T} - I) \right) l}{\sum_{i=1}^{n} e^{-rt_i} \left(1 - \alpha e^{Qt_i} l \right) (t_i - t_{i-1})}.$$

Le calcul du spread de l'index CDS et d'une tranche de CDO revient donc à un simple calcul matriciel et la rapidité de cette procédure repose sur le calcul de l'exponentielle d'une matrice. Les différentes étapes pour calculer le spread de l'index CDS et d'une tranche CDO sont :

Etape 1 : Définir le nombre de firmes et définir l'intensité de défaut commune et la matrice génératrice Q.

Etape 2 : Définir la grille des paiements et calculer pour chaque point t_i de la grille $\exp(Qt_i)$, définir une boucle pour calculer le dénominateur du spread en fonction des caractéristiques du produit(taux de recouvrement, taux d'interêt,$\cdots$).

Etape 3 : Déduire $\exp(QT)$ et le numérateur du spread, calculer ensuite le spread.

Cette procédure met en évidence la nécessité de définir la matrice Q pour le calcul. Cette matrice dépend du vecteur $u = (a, b_1, \cdots, b_{d-1})$. Lorsque le nombre de firme explose, il est donc impossible de calibrer le vecteur u connaissant uniquement un nombre fini de spreads de tranches CDO (exemple tranches Itraxx $d = 125$). Par rapport aux données dont on dispose (spread index CDS+spread de cinq tranches CDO données Itraxx), on fera une hypothèse supplémentaire pour calibrer le vecteur u.

Assumption A 11. *En notant μ_i le nombre minimum à partir duquel la tranche i est totalement absorbée, on suppose qu'il existe une constante $b^{(i)}$, $1 \leq i \leq 6$ telle que :*

$$b_k = b^{(i)} \mathbf{1}_{\{k \in [\mu_{i-1}, \mu_i]\}}, \qquad \forall k \in \{1, \cdots, d\}$$

En utilisant les cinq tranches de l'Itraxx et l'index CDS de maturité cinq ans :

[0.0,0.03]	[0.03,0.06]	[0.06,0.09]	[0.09, 0.12]	[0.12, 0.22]	Index CDS
27.6	168	70	43	20	42

Spreads des tranches de CDO et de l'Index CDS 2004-08-04

On retrouve en utilisant les moindres carrés sur ces spreads une estimation du vecteur u :

$$\hat{u} = arg\min_{u} \sum_{i=1}^{6} \left(\kappa_{i,Market} - \kappa_i(u)\right)^2$$

Le vecteur $\hat{u}$ (bps) en calibrant sur les données de spreads précédents est donné par :

a	$b^{(1)}$	$b^{(2)}$	$b^{(3)}$	$b^{(4)}$	$b^{(5)}$	$b^{(6)}$
33	16.4	84.5	145	86.4	124	514

vecteur u : 2004-08-04

La positivité des sauts d'intensité peut expliquer une corrélation positive entre les différentes firmes ; néanmoins, il est indispensable de noter que pour une autre maturité $T \neq 5$ on retrouve des sauts d'intensité différents. Celà pourrait justifier qu'il faut tenir compte de la structure à terme dans notre modèle, des paramètres qui dépendraient non seulement du paramètre t, mais aussi du paramètre T représentant l'horizon du dérivé de crédit. Dans l'approche Top down, nous mettons en évidence cette structure à terme nous basant sur les travaux de Schönbucher [69].

4.3.2 Approche Top down

Dans cette approche nous déterminons directement le processus de perte en supposant qu'il est une chaîne de Markov inhomogène. Nous travaillons sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G}, \mathbb{P})$ et nous ne supposons plus que la filtration de reférence est triviale. Nous supposons que le portefeuille de dettes est homogène et que les paramètres contractuels sont les mêmes que ceux énoncés dans le cadre statique. Dans cette partie nous appelons processus de perte, le processus défini par :

$$L_t = \sum_{i=1}^{d} \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq d\}}, \qquad t \in [0, T]$$

Definition 20. *Le vecteur de probabilité conditionnelle du nombre de défaut à la date T étant données les informations à la date t, $p(t,T) = (p_0(t,T), \cdots, p_d(t,T))$ est défini par :*

$$p_n(t,T) = \mathbb{P}\left(L_T = n | \mathcal{G}_t\right), \qquad 0 \leq n \leq d$$

Assumption A 12. *On suppose dans la suite que le processus de perte est une chaîne de Markov inhomogène et qu'il existe une matrice de transition* $A(.T) = [(a_{i,j}(.,T)]_{1\leq i,j\leq d}$ *tel que le vecteur de probabilité conditionnelle satisfait l'équation de Kolmogorov :*

$$\frac{\partial}{\partial T}P(t,T) = A(t,T).P(t,T), \qquad t \leq T$$

Les coefficients de la matrice A *vérifient pour tout* $t \in [0,T]$, $0 \leq i \leq d$: $\sum_{j=1}^{d} a_{i,j}(t,T) = 0$. *et les coefficients de la matrice* $P(t,T)$ *sont définis par* $P_{n,m}(t,T) = \mathbb{P}(L_T = m|L_t = n)$ *pour tout* $n, m \in \{0, 1, \cdots, d\}$.

Etant donnée la matrice de transition A on déduit une relation récursive sur les probabilités conditionnelles induite par l'hypothèse précédente :

$$P_{n,m}(t,T) = \begin{cases} 0 \quad m < n \\ \exp\left(-\displaystyle\int_t^T a_n(t,s)ds\right) \quad m = n \\ P_{m,m}(t,T)\displaystyle\int_t^T \sum_{k=n}^{d-1} \frac{P_{n,k}(t,s)}{P_{m,m}(t,s)} a_{k,m}(t,s)ds \quad m > n \end{cases}$$

Pour simplifier cette relation de récurrence, on suppose l'hypothèse suivante :

Assumption A 13. *On supposera que sur l'intervalle* $[T, T + \Delta T]$ *il peut y avoir au plus un défaut. Cette hypothèse implique :*

$$a_{n,k}(t,T) = 0, \qquad n \in \{0, 1, \cdots, d\}, k > n+1, t \in [0,T].$$

La matrice A *sera donc une matrice bidiagonale et la relation de récurrence simplifiée est donnée par :*

$$P_{n,m}(t,T) = \begin{cases} 0 \quad m < n \\ \exp\left(-\displaystyle\int_t^T a_n(t,s)ds\right) \quad m = n \\ P_{m,m}(t,T)\displaystyle\int_t^T P_{n,m-1}(t,s)a_{m-1}(t,s)ds \quad m > n \end{cases}$$

Assumption A 14. *On suppose que la matrice de transition* A *est consistante par rapport au processus de perte* L. *En d'autres termes :*

$$p_n(t,T) = P_{L_t,n}(t,T), \qquad n \in \{0, 1, \cdots, d\}, t \leq T.$$

Proposition 30. *Sous l'hypothèse de consistance on obtient :*

- L'intensité du processus de perte à l'instant $t \in [0, T]$ *est donnée par* $\lambda_t = a_{L_t}(t, t)$.

- Le processus $[p_n(t, T)]_{t \leq T}$ *est une* $\mathbb{P}-$ *martingale.*

D'après la formule de recursivité on obtient explicitement les probabilités conditionnelles connaissant la matrice de transition A, néanmoins cette matrice doit être consistante au processus L ce qui engendrera une contrainte sur la dynamique de ses coefficients.

Proposition 31. *On suppose que la filtration de reférence est engendrée par un mouvement brownien* W. *Pour tout* $n \in \{0, 1, \cdots, d\}$ *soit* $[\mu(t, s)]_{t \leq T}$ *et* $[\sigma(t, s)]_{t \leq T}$ *le drift et la volatilité du processus* $[a_n(t, s)]_{t \leq T}$, *pour tout* $s \leq T$:

$$da_n(t, s) = \mu_n(t, s)dt + \sigma_n(t, s)dW_t$$

On obtient d'après l'hypothèse de consistance la relation :

$$P_{L_t,n}(t, s)\mu_n(t, s) = -\sigma_n(t, s)v_{L(t),n}(t, s).$$

voir [69], où $v_{L_t,n}(., s)$ représente la volatilité de $P_{L(t),n}(., s)$, $s \leq T, t \in [0, T]$. Cette relation de consistance est d'autant plus complexe qu'il est difficile d'obtenir une relation simplifiée entre le drift et la volatilité des taux de transition vu la dépendance entre la probabilité conditionnelle et A. Dans la suite nous supposons connues les matrices A et P , nous donnons les dynamiques des spreads de l'index CDS et d'une tranche de CDO connaissant ces matrices.

Spread de l'index CDS dans un cadre dynamique

En supposant les mêmes paramètres contractuels que dans le cadre statique (taux de recouvrement R, taux d'intérêt r, notionel $N = 1$, nombre d'entités d) nous définissons la jambe de paiement et la jambe de défaut afin de définir le spread.

Jambe de paiement On suppose $\kappa_t ds$ le spread versé sur un intervalle de longueur ds où κ_t représente le spread annuel fixé à l'instant t, la jambe de paiement sur l'intervalle

$[t,T]$ est définie par :

$$JP_{t,T} = \kappa_t \int_t^T e^{-r(s-t)} \left(1 - \frac{(1-R)}{d} L_s\right) ds$$

En utilisant la matrice de probabilités conditionnelles on déduit :

$$\mathbb{E}\left(JP_{t,T}|\mathcal{G}_t\right) = \kappa_t \int_t^T e^{-r(s-t)} \left(\sum_{n=0}^{d} \left[1 - \frac{(1-R)}{d} n\right] p_n(t,s)\right) ds$$

Jambe de défaut De même la jambe de défaut sur l'intervalle $[t,T]$ est définie par :

$$JD_{t,T} = \int_t^T e^{-r(s-t)} \frac{(1-R)}{d} dL_s$$

En utilisant l'intensité du processus L on déduit :

$$\mathbb{E}\left(JD_{t,T}|\mathcal{G}_t\right) = \frac{(1-R)}{d} \int_t^T e^{-rs} \mathbb{E}\left(a_{L_s}(s,s)|\mathcal{G}_t\right) ds = \frac{(1-R)}{d} \int_t^T e^{-r(s-t)} \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{d} a_n(s,s) p_n(s,s)|\mathcal{G}_t\right) ds$$

or le processus $[a_n(t,s)p_n(t,s)]_{t\leq T}$ est une $\mathbb{P}$ martingale (c'est équivalent à la proposition $(p_n(t,s))_{t\leq T}$ est une martingale, (voir [69]). On déduit ainsi l'expression de la jambe de défaut :

$$\mathbb{E}\left(JD_{t,T}|\mathcal{G}_t\right) = \frac{(1-R)}{d} \int_t^T e^{-r(s-t)} \sum_{n=0}^{d} a_n(t,s) p_n(t,s) ds.$$

On déduit ainsi le spread de l'index CDS à l'instant $t \in [0,T]$ défini par l'equation $\mathbb{E}\left(JP_{t,T}|\mathcal{G}_t\right) = \mathbb{E}\left(JD_{t,T}|\mathcal{G}_t\right)$:

$$\kappa_t = \frac{\int_t^T e^{-r(s-t)} \sum_{n=0}^{d} a_n(t,s) p_n(t,s) ds}{\int_t^T e^{-r(s-t)} \left(\sum_{n=0}^{d} \left[\frac{d}{1-R} - n\right] p_n(t,s)\right) ds}.$$

Spread d'une tranche CDO dans cadre dynamique

Soit une tranche de CDO $[a,b]$, le calcul de la jambe de paiement et de la jambe de défaut d'une telle tranche se fait en utilisant les nombres $n_u = \frac{bd}{(1-R)}$ et $n_l = \frac{ad}{(1-R)}$.

Jambe de paiment soit $\kappa_t ds$ le spread versé fixé sur un intervalle ds pour une tranche de CDO acheté en t. la jambe de paiement totale sur $[t,T]$ est :

$$JP_{t,T} = \kappa_t \int_t^T e^{-r(s-t)} \frac{(1-R)}{d} (n_u - L_s) \mathbf{1}_{\{n_l \leq L_s \leq n_u\}} ds$$

En utilisant la matrice de transition on trouve :

$$\mathbb{E}\left(JP_{t,T}|\mathcal{G}_t\right) = \kappa_t \frac{(1-R)}{d} \int_t^T e^{-r(s-t)} \sum_{n=n_l}^{n_u} (n_u - n) p_n(t,s) ds.$$

Jambe de défaut De même la jambe de défaut sur l'intervalle $[t,T]$ est définie par :

$$JD_{t,T} = \frac{(1-R)}{d} \int_t^T e^{-r(s-t)} dL_s \mathbf{1}_{\{n_l \leq L_s \leq n_u\}}$$

En utilisant la matrice de transition on trouve :

$$\mathbb{E}\left(JD_{t,T}|\mathcal{G}_t\right) = \frac{(1-R)}{d} \int_t^T e^{-r(s-t)} \sum_{n=n_l}^{n_u} a_n(t,s) p_n(t,s).$$

On déduit ainsi l'expression du spread d'une tranche de CDO à l'instant t :

$$\kappa_t = \frac{\int_t^T e^{-r(s-t)} \sum_{n=n_l}^{n_u} a_n(t,s) p_n(t,s)}{\int_t^T e^{-r(s-t)} \sum_{n=n_l}^{n_u} (n_u - n) p_n(t,s) ds}.$$

Dans la suite nous donnons les différentes étapes à suivre pour l'implémentation de ces spreads dynamiques en tenant compte de la relation de consistance. Nous supposons connue la matrice de transition, nous calibrons sur le marché les différents coefficients de cette matrice en les paramétrisant selon les tranches de CDO et les différentes maturités des contrats sur le marché.

Etape 1 : Définir la matrice de transition A et simuler la matrice des probabilités de transition P c'est une matrice tridimensionnelle (espace nombre de défaut, espace temps t, espace temps futur T). Pour simuler cette matrice utiliser la relation de recursivité, simuler en premier les termes diagonaux ensuite déduire les autres coefficients.
Etape 2 : Etant donnée la matrice des probabilités de transition, définir le spread de l'index CDS et d'une tranche de CDO.
Etape 3 : Connaissant les spreads des six dérivés de crédit de l'Itraxx (cinq tranches de CDO+ index CDS) sur les différentes maturités trois ans, cinq ans, sept ans, et dix ans on paramétrise les coefficients des transitions rates pour $t = 0$, de la manière suivante :

$$a_n(0,s) = constante(n,s), \qquad (n,s) \in \{n_l, \cdots, n_u\} \times (0, T_i), T_i = 3, 5, 7, 10$$

où $\{n_l, \cdots, n_u\} \in \{\{1, \cdots, 6\}; \{7, \cdots, 12\}; \{13, \cdots, 18\}; \{19, \cdots 25\}; \{26, \cdots, 45\}; \{46, \cdots, 125\}\}$.
Connaissant les spreads des six dérivés de crédit sur ces différentes maturités on peut donc grâce à cette paramétrisation initialiser la matrice de transition $A(0, T)$.

Etape 4 : Les coefficients de transitions étant initialisés, pour calculer $A(0 + \Delta t, T)$, initialiser la boucle à zero $k = 0$, initialiser la perte L à zéro. Simuler une loi uniforme U si $U < a_L(k\Delta t, k\Delta t)\Delta t$ alors $L = L + 1$. Fixer la volatilité des coefficients prendre $\sigma_n(k\Delta t, T) = cste$ ensuite utiliser la relation de consistance pour calculer le drift. Déteminer la matrice $P(0 + (k+1)\Delta t, T)$ déduire le spread $\kappa_{(k+1)\Delta t}$ repéter cette étape k=$\left[\frac{t}{\Delta t}\right]$ fois.

On déduit ainsi grâce aux données des différents spreads et une paramétrisation des coefficients de la matrice de transitions une dynamique des spreads. Les données dont nous disposons datent de l'avant crise 02/04/2007 :

	[0.03,0.06]	[0.03,0.06]	[0.06,0.09]	[0.09,0.12]	[0.12, 0.22]
T=3	-1.76	4	1	0	0
T=5	11.25	58	15	7	3
T=7	25.75	135	39	18	6
T=10	40.50	340	99	46	14

Quoted CDO tranches margins/upfront

T=3	T=5	T=7	T=10
13	24	33	44

Quoted index CDS spread 02/04/2007

	$\{1, \cdots 6\}$	$\{7, \cdots, 18\}$	$\{18, \cdots 25\}$	$\{18, \cdots 25\}$	$\{26, \cdots 45\}$
T=3	0.259	0.00205	0.00005	0.0	0.0
T=5	0.383	0.0289	0.000075	0.000044	0.00
T=7	0.472	0.0669	0.0019	0.00010	0.00011
T=10	0.500	0.170	0.0049	0.00027	0.000266

Transitions rates $a_n(0, T)$

En supposant que le taux de transition $a_n(0,T)$ est une fonction croissante de n (plus le nombre de défaut est grand, plus la chîne L a une probabilité forte de sauter à tout instant), il était impossible de calibrer les diiférentes tranches en utilisant la structure par terme. Les résultats obtenus attestent bien que ce point de vue n'est partagé par les acteurs du marché. En effet, pour une maturité fixée T, la probabilité que la perte L saute sur la tranche Equity est plus forte que celle sur la tranche Mezzanine(ex $T = 3$, $a_n(0,T) = 0.259$ sur la tranche Equity, $a_n(0,T) = 0.00205$). Celà peut s'expliquer par le fait que toutes nos mesures ou calibrations sont faites sur la probabilité risque neutre définie plus ou moins par les agences de notations à travers leurs notes sur les tranches CDO. Ce tableau traduit bien que les tranches senior étaient au préalabre bien sécurisées en examinant les transitions rates sur ces tranches.
Ce modèle fait ressortir une mesure du risque croissante en fonction de la maturité. Nous pouvons l'observer sur les différentes tranches (ex tranche Equity $T = 3$, $a_n(0,T) = 0.259$; $T = 5$, $a_n(0,T) = 0.383$; $T = 7$, $a_n(0,T) = 0.472$ voir aussi les autres tranches). Cette observation est tout à fait justifiée car plus la durée du contrat est longue plus il est possible qu'il se produit plus de défauts sur la tranche.

4.4 Conclusion

Dans le cadre statique et dans le cadre dynamique, les méthodes numériques restent très simples à implémenter avec l'hypothèse d'homogeneité du portefeuille de dettes. Toutefois la calibration des différents paramètres reste fastidieux quant on connait le manque de données sur ces dérivés de crédit. Le marché actuel des dérivés de crédit ne nous permet pas de comprendre comment évolue la corrélation de défaut entre les firmes. L'observation des spreads des CDS des différentes firmes du panier et des spreads des tranches de CDO sur ces firmes ne nous permet pas de construire la probabilité jointe conditionnelle. De plus, les mesures sur la corrélation des défauts restent biaisées car elles dépendent de la note des agences de notation.

Pour mieux modéliser le défaut et le risque de contagion, nous devons rechercher une nouvelle source d'informations necéssaire à la reconstruction de cette probabilité jointe, car il y'a une perte d'informations lors de la titrisation de ces dérivés de crédit.

Bibliographie

[1] Anderson E., Hansen L. P. , and Sargent T. : A quartet of semigroups for model specification, robustness, prices of risk, and model detection. *Journal of the European Economic Association* **1**/ *68–123 (2003).*

[2] Ankirchner, S., Blanchet-Scalliet, C., Elyraud-Loisel, A. : A Credit Risk Premia and Quadratic BSDE's with a single jump, *Preprint 2009.*

[3] Barles, G., Buckdahn, R. and Pardoux, E. : Backward Stochastic Differential Equatiions and Integral-Partial Differential Equations. *Stochastics and Stochastics Reports*, Vol. **60**, *57–83 (1997).*

[4] Barlow, M. T., Protter, Ph. : On convergence of semimartingales. *Séminaire de probabilités(Strasbourg),* tome **24**(1990), p. 188-193.

[5] Barrieu, P., El Karoui, N., Xu, M. : Stability properties of BMO quadratic semimartingales and applications to quadratic BSDEs. Preprint (2009).

[6] Barrieu, P., El Karoui, N. : Pricing, Hedging and Optimally Designing Derivatives via Minimization of Risk Measures. In the book *"Indifference Pricing : Theory and Applications" edited by René Carmona, Princeton University Press (2008).*

[7] Becherer, D. : Utility-indifference hedging and valuation via reaction-diffusion systems, *Proc.Roy.Soc, London 460 27-51 (2004).*

[8] Becherer, D. : Bounded solutions to Backward SDE's with jump for utility optimization and indifference hedging, *Annals of Applied Probability,***16**, *2027-2054 (2006).*

[9] Bismut, J.M. : Conjugate Convex Functions in Optimal Stochastic Control, *J. Math. Anal. Appl.*, **44**, *384-404 (1973).*

[10] Boccardo, L., Murat, F., Puel, J.P. : Existence de solutions faibles pour des équations élliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique. *In Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications Research Notes in Math* **84**,*19-73, Pitman London (1983).*

[11] Boccardo, L., Murat, F., Puel, J.P. : Existence de solutions non bornées pour certaines équations quasi-linéaires. *Portugal Math* , **41** *507-534 (1982*

[12] Bordigoni G. : Stochastic control and BSDEs in a robust utility maximization problem with an entropic penality term. *PhD Thesis of Politecnico di Milano (2005).*

[13] Bordigoni G., Matoussi,A., Schweizer, M. : A Stochastic control approach to a robust utility maximization problem. *F. E. Benth et al. (eds.), Stochastic Analysis and Applications. Proceedings of the Second Abel Symposium, Oslo, 2005*, *Springer*, *125-151 (2007)* .

[14] Briand,.P, Y,Hu. : BDSE with quadratic growth and unbounded terminal value, *Probab. Theory Related Fields* **136**, *604-618,(2006).*

[15] Le Cam ; Y. and Jeanblanc, M. : Immersion Property and Credit Risk Modelling, Festchrift for Y. Kabanov.

[16] Csiszár, I. : *I*-divergence geometry of probability distributions and minimization problems. *Annals of Probability* **3**, *146-158 (1975).*

[21] Delbaen, F. and Schachermayer, W. : A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math.Annal*, **3**00, *463-520,(1994).*

[18] Dellacherie, C., Meyer, P.A. : Probabilités et Potentiel. Chap. I-IV. *Hermann*, *Paris (1975).*

[19] Dellacherie, C., Meyer, P.A. : Probabilités et Potentiel. *Chap. V-VIII. Hermann*, *Paris (1980)*.

[20] Duffie, D. and Epstein, L. G. : Stochastic differential utility. *Econometrica* **60**, *353-394 (1992).*

[21] Duffie, D., Skiadas, C. : Continuous-time security pricing : a utility gradient approach. *J. Math. Econom. 23, 107-131 (1994).*

[22] El Karoui, N., Hamadène, S. and Matoussi, A. : Backward stochastic differential equations and applications. Chapter 8 in the book *"Indifference Pricing : Theory and Applications", edited by René Carmona, Princeton Series in Financial Engineering, 267-320 (2009).*

[23] El Karoui, N., Mazliak,L. (eds) : Backward Stochastic Differential Equations, *Pitman Res. Notes Math. Ser. Longman Harlow 364, (1997).*

[24] El Karoui, N., Mrad M. : Construction of all progressive utilities for a given optimal portfolio : Stochastic flow approach. Forthcoming paper.

[25] El Karoui, N. Peng, S. and Quenez, M.-C. : A dynamic maximum principle for the optimization of recursive utilities under constraints. *Annals of Applied Probability* **11**, *664-693 (2001).*

[26] El Karoui, N. : Les aspects probabilistes du contrôle stochastique, *Ecole d'été de Saint-Flour*, *Lecture Notes in Mathematics 876, 73-238. Springer Verlag Berlin.(1982)*

[27] El Karoui, N., Peng S., Quenez M.C. : Backward Stochastic Differential Equations in Finance, *Mathematical Finance* **7**, *1-71 (1997).*

[28] El Karoui, N., Quenez, M.C. : Dynamic Programming and Pricing of Contingent Claims in an Incomplete Market, *SIAM Journal of Control and Optimization* **33**, *29-66 (1995).*

[29] El Karoui, N. and Quenez, M.C. : Non-linear Pricing Theory and Backward Stochastic Differential Equations in Financial Mathematics (ed : W.J. Runggaldier) *Lecture Notes in Mathematics 1656*, *Springer Verlag, 191-246 (1996).*

[30] El Karoui, N. and Rouge, R. : Pricing via Utility Maximization and Entropy, *Mathematical Finance* **10**, *259-276 (2000).*

[31] El Karoui, N., Hamadène, S. : BSDEs and risk-sensitive control, zero-sum and nonzero-sum game problems of stochastic functional differential equations. *Stochastic Processes and their Applications* **107**, *145-169 (2003).*

[32] Faidi, W., Matoussi, A., Mnif M. : Maximization of Recursive Utilities : A Dynamic Maximum Principle Approach. *Preprint of University Maine (2009).*

[33] Fleming, W.H., Sheu, S.J. : Risk-Sensitive Control and an Optimal Investment Model, *Mathematical Finance*, **10**, *197-213 (17) (2000).*

[34] Fleming, W.H. and Sheu, S.J. : Risk-Sensitive Control and an Optimal Investment Model II, *Annals of Applied Probability* **12**, *730-767 (2002).*

[35] Frittelli, M. : The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets. *Mathematical Finance* **10**, *39-52 (2000).*

[36] Gundel, A. : Robust utility maximization for complete and incomplete market models. *Finance and Stochastics* **9**, *151-176 (2005).*

[37] A. Grorud and M. Pontier : Asymmetrical information and incomplete markets. *IJ-TAF*, **4**, 285-302, 2001.

[38] Hamadène, S., Oukine, B. : BSDE with local time, *Stochastic and Stochastic Reports*, **66**,*103-119,(1999).*

[39] Hamadène, S. : Equations différentielles stochastiques rétrogrades : le cas localement lipschitzien. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **32**, 5, *645-659 (1996).*

[40] Hansen, L.P.,Sargent,T.J.,Turmuhambetova, G.A., Williams,N. : Robust control and model misspecification, *Journal of Economic Theory* **128**,45-90, 2006.

[41] Herbertsson, A. : Default contagion in a large homogeneous portfolios. *The credit Derivatives Hand book Global perspectives, Innovations, and Markets Drivers*, Gregoriou, G.N and Ali, P.U, (eds), McGraw-Hill, New York (2008).

[42] Hu, Y., Imkeller, P. and Müller, M. : Utility Maximization in Incomplete Markets. *Annals of Applied Probability* **15**, *1691-1712 (2005).*

[43] Jiao, Y., Pham, H. : Optimal investment with counterparty risk : a default density modeling approach.*Preprint 2009.*

[44] Kazamaki, N. : Continuous Exponential Martingales and BMO, *Lectures Notes, 1579 ; Springer-Verlag (1994).*

[45] Kobylanski, M. : Backward Stochastic Differential Equations and Partial Differential Equations with Quadratic Growth, *Annals of Probability* **28**, *558-602 (2000).*

[46] Kusuoka, S. : A remark on default risk models, *Adv. Math. Econ.*, 1,69-82,1999

[50] Lazrak, A. and Quenez, M.-C. : A generalized stochastic differential utility. *Mathematics of Operations Research*, **28**, *154-180 (2003).*

[48] Karatzas, I., Shreve, S.E. : Methods of Mathematical Finance. *Springer 1998.*

[49] Kramkov, D. and Schachermayer, W. : The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. *Annals of Applied Probability* ***9*** *, 904-950 (1999).*

[50] Lazrak, A. and Quenez, M.-C. : A generalized stochastic differential utility. *Mathematics of Operations Research*, **28**, *154-180 (2003).*

[51] Lepeltier, J.-P., San Martin, J. : existence of BSDE with Supelinear Quadratic coefficient, *Stochastics and Stochastic* Report **63**, *227-240 (1998).*

[52] Lim, T., Quenez, M. : Utility maximization in incomplete markets. *Preprint 2010.*

[53] Meyer, P.A : Un cours sur les intégrales stochastiques, *Séminaire de Probabilité X, LNM 511, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 245-400(1976).*

[54] Ma, J., Yong, J. : Forward-Backward Stochastic Differential Equations and Their Applications. *Lecture Notes in Mathematics 1702. Springer, Berlin (1999).*

[55] Maenhout, P. (2004) : Robust portfolio rules and asset pricing. *Review of Financial Studies **17**, 951-983 (2004).*

[56] Mania, M. and Schweizer, M. : Dynamic exponential utility indifference valuation. *Annals of Applied Probability* **15**, *2113-2143 (2005).*

[57] Morlais, A. : utility maximization in a jump market model, *Stochastics* , **81**,*1-27 (2009).*

[58] Mrad, M. : Utilités progressives. Thèse de Doctorat de l'École Polytechnique (2009).

[59] Oksendal, B, Sulem, A. : Robust stochastic control and equivalent martingale measures. *Preprint 2010.*

[60] Pardoux, E. Peng, S. : Adapted solution of a backward stochastic differential equation, *Systems and Control Letters*, **14**, *p. 55-61 (1990).*

[61] Pardoux, E. Peng, S. : Backward SDEs and quasilinear PDEs, in *Stochastic partial differential equations and their applications, B.L.Rozovskii & R. Sowers eds.*, *LNCIS 176, Springer (1992).*

[62] Peng, S. : Backward SDE and Related g-Expectations, in Backward Stochastic Diffential Equations *(eds : N. El Karoui and L. Mazliak), Pitman Res. Notes Math. Ser. Longman Harlow 364, 141-159 (1997).*

[63] Peng, S. : Monotonic limit theorem of BSDE and nonlinear decomposition theorem of Doob-Meyer's type. *Proba. Theory Rel. Fields* **113**, *473-499 (1999).*

[64] Peng, S. : Nonlinear Expectations and Risk Measures, *in Proceedings of the CIME-EMS summer school, Bressanone, Italy, july 6-12, (2003)*

[65] Peng, S. : Nonlinear Expectations, Nonlinear Evaluations and Risk mesaures. *LNM 1856, Frittelli and Runggaldier (Eds.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg , pp. 165-253 (2004).*

[66] Quenez, M.-C. : Optimal portfolio in a multiple-priors model. in : R. Dalang, M. Dozzi and F. Russo (eds.), *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications IV, Progress in Probability* 58, *Birkhäuser, p. 291-321 (2004).*

[67] Schied, A. : Optimal investments for risk- and ambiguity-averse preferences : a duality approach. *Finance and Stochastics* **11**, *107-129 (2007).*

[68] Schied, A. and Wu, C.-T. : Duality theory for optimal investments under model uncertainty. *Sat. Decisions* **23**, *199-217 (2005).*

[69] Schönbucher, P. : Portfolio losses and the term structure of loss transition rates, working paper (2006).

[70] Schroder, M. and Skiadas, C. : Optimal consumption and portfolio selection with stochastic differential utility. *Journal of Economic Theory* **89**, *68-126 (1999).*

[71] Schroder, M, Skiadas, C. : Optimal lifetime consumption-portfolio strategies under trading constraints and generalized recursive preferences. *Stochastic Processes and their Applications* **108**, *155-202 (2003).*

[72] Schroder, M., Skiadas, C. : Lifetime consumption-portfolio choice under trading constraints, recursive preferences, and nontradeable income. *Stochastic Processes and their Applications* **115**, *1-30 (2005).*

[73] Skiadas C. : Robust control and recursive utility. *Finance and Stochastics* **7**, *475- (2003).*

[74] Tevzadze, R. : Solvability of backward stochastic differential equations with quadratic growth. *Stoch. Processes and their Applications*, **118**, *503-515 (2008).*

[75] Yoeurp, C., Meyer, A. : Sur la décomposition multiplicative des sousmartingales positives. *Séminaire de probabilités(Strasbourg),* tome **10**,p.501-504 (1976).